Funkcje analityczne **Lista 2**

21. Zbadaj zbieżność ciągów

$$a_n = \frac{2^n}{n^2} + \frac{i\cos n\pi}{n^3}, \qquad b_n = z^n, \qquad c_n = \frac{in + n^2}{n^2 - i}.$$

Wsk. $|b_{n+1} - b_n| = \ldots$.

22. Oblicz sumy szeregów (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^{2n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{(1+2i)^{2n}}$.

23. Jeśli istnieje granica $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, to jest ona równa promieniowi zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-p)^n$.

24. Znajdź promienie zbieżności szeregów potęgowych

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \quad \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} nz^n, \quad \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} 3^n(z-2)^n, \quad \text{(d)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n!}, \quad \text{(e)} \sum_{n=0}^{\infty} n!z^n,$$

$$\text{(f)} \sum_{n=0}^{8} n!z^n, \quad \text{(g)} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2n}, \quad \text{(h)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n\ln^2 n}, \quad \text{(i)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{\ln n}.$$

25. Zbadaj zachowanie szeregów z zadania 24(a), (b), (g), (h), (i) na brzegach ich kół zbieżności.

26. Rozwiń w szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-p)^n$ funkcję f, gdzie

(a) $f(z) = \dfrac{1}{1-iz}$ oraz $p = 0$, (b) $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ oraz $p = i$, (c) $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ oraz $p = 2$.

Jakie są promienie zbieżności otrzymanych szeregów?

27. Uzasadnij, że szereg potęgowy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n^3}$ jest zbieżny jednostajnie na $\overline{D(0,1)}$.

28. Stosując twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej, oblicz granice

(a) $\lim\limits_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+ik}$;

(b) $\lim\limits_{w\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z+w)^n$ dla $z \in D(0,r)$, przy założeniu, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ jest zbieżny na $D(p,r)$.

---

29. Sprawdź, czy funkcja $f(z) = \overline{z}$ spełnia równania Cauchy-Riemanna.

30. Oblicz pochodne (wszędzie tam gdzie istnieją) funkcji: (a) $f(z) = \overline{z}^2 - z$, (b) $f(z) = |z|^2$, (c) $f(z) = \dfrac{a-z}{1-\overline{a}z}$, gdzie $a \in \mathbb{C}$.

31. Jeśli $f \in C^2(\Omega)$ (jako funkcja dwóch zmiennych rzeczywistych) oraz $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, to $\Delta f = 4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = 4\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z}\partial z}$.

32. Funkcję f nazywamy harmoniczną na zbiorze Ω, jeśli $\Delta f = 0$ na Ω. Wykaż, że funkcja holomorficzna na Ω, a także jej części rzeczywista i urojona są harmoniczne na Ω.

33. ♡ Wyraź $\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}$ oraz $\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}$ przez $\frac{\partial f}{\partial z}$ i $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$.

34. ♡ Jeśli $f \in H(\Omega)$, to $h(z) = \overline{f(\overline{z})}$ jest holomorficzna na $\overline{\Omega} = \{z : \overline{z} \in \Omega\}$.

Przypomnienie: Niech X, Y będą przestrzeniami metrycznymi. Zbiór $A \subset X$ nazywamy *spójnym*, jeśli dla dowolnych rozłącznych zbiorów otwartych $G_1, G_2 \subset X$ takich, że $A \subset G_1 \cup G_2$ zachodzi $A \cap G_1 = \emptyset$ lub $A \cap G_2 = \emptyset$. Funkcja $f : X \to Y$ jest ciągła, jeśli dla dowolnego zbioru otwartego $G \subset Y$ zbiór $f^{-1}(G) := \{x \in X : f(x) \in G\}$ jest otwarty w X.

35. Obraz zbioru spójnego przez funkcję ciągłą jest zbiorem spójnym.

36. ♡ Zbiór otwarty $G \subset \mathbb{C}$ jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy każde dwa punkty tego zbioru można połączyć łamaną zawartą w G. *Wsk. Niech $x_0 \in G$ i niech E będzie zbiorem punktów G, które można połączyć z punktem x_0 łamaną zawartą w G. Pokazać, że E oraz $G \setminus E$ są otwarte.*

---

37. Jeśli $F \in H(\Omega)$ i $f = F' \in C(\Omega)$, a γ jest drogą w Ω o początku w a i końcu w b, to
$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(b) - F(a).$$

38. Niech γ będzie odcinkiem o początku w punkcie 1 i końcu w punkcie $3+i$. Oblicz całkę
$$\int_\gamma z^2\,dz$$
z definicji oraz z zadania 37

39. Jeśli $f \in H(\Omega)$ i $f' = 0$ na Ω, to f jest stała na każdej składowej spójności zbioru Ω.

40. Jeśli $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ jest drogą, a f zespoloną funkcją ciągłą na γ^*, przy czym $M = \sup_{\gamma^*} |f|$, to
$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \le M\ell(\gamma), \qquad \text{gdzie } \ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt.$$

41. Sformułuj i udowodnij wzór na całkowanie przez części dla całki wzdłuż drogi.

42. (Funkcje holomorficzne o niezerowej pochodnej zachowują kąty) Niech $\gamma_1, \gamma_2 : [\alpha, \beta] \to \Omega$ będą drogami klasy C^1, niech $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ dla pewnego $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Uzasadnij, że jeśli $f \in H(\Omega)$ ma niezerową pochodną na Ω, to $f \circ \gamma_k$ są drogami w Ω. Ponadto jeśli $\gamma_1'(t_0) \neq 0$ i $\gamma_2'(t_0) \neq 0$, to kąt pomiędzy drogami γ_1^* i γ_2^* w punkcie $\gamma_1(t_0)$ jest taki sam, jak pomiędzy drogami $(f \circ \gamma_1)^*$ i $(f \circ \gamma_2)^*$ w punkcie $f \circ \gamma_1(t_0)$. *Wskazówka.* Znaleźć wektory styczne do tych dróg.