Funkcje analityczne **Lista 3**

Funkcję *wykładniczą* exp określamy następująco

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Definicja ta jest poprawna, tj. powyższy szereg potęgowy jest zbieżny na $\mathbb{C}$. Następnie definiujemy funkcje *trygonometryczne* wzorami

$$\sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}, \quad \cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Na wykładzie udowodnimy, że $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$ dla dowolnych $z, w \in \mathbb{C}$. Następne zadania należy rozwiązać korzystając (tylko) z tego wzoru, z definicji funkcji exp, cos, sin i poprzednich zadań.

43. Zauważ, że funkcje exp, sin i cos są holomorficzne na $\mathbb{C}$ i oblicz ich pochodne.

44. ♡ Obcięcie funkcji exp do $\mathbb{R}$ jest funkcją dodatnią i ściśle rosnącą.

45. ♡ Korzystając ze wzoru $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$ wyprowadź wzór na $\cos(z + w)$ oraz $\sin(z + w)$. Uzasadnij, że $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

46. ♡ Uzasadnij, że obcięcia funkcji sin i cos do $\mathbb{R}$ są funkcjami o wartościach rzeczywistych. Sprawdź, że $\cos 0 = 1$, $\cos 2 < 0$ i wywnioskuj stąd, że istnieje najmniejsza liczba dodatnia t_0, dla której $\cos t_0 = 0$. **Definicja:** $\pi = 2t_0$.

47. ♡ Uzasadnij, że funkcje sin i cos są monotoniczne i dodatnie na $(0, \pi/2)$. Oblicz ich wartości w punktach 0, $\pi/2$, π, 2π. Uzasadnij, że funkcje sin i cos są 2π-okresowe, a funkcja exp jest $2\pi i$-okresowa.

48. Odwzorowanie $t \mapsto \exp(it)$ przekształca $\mathbb{R}$ *na* okrąg jednostkowy $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

49. $\exp(z) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z/(2\pi i) \in \mathbb{Z}$.

50. Dla dowolnej liczby $z \in \mathbb{C}$ mamy $\exp(z) \neq 0$. Jeśli $w \in \mathbb{C}$ i $w \neq 0$, to $w = \exp(z)$ dla pewnej liczby $z \in \mathbb{C}$.

51. (Postać trygonometryczna liczb zespolonych) Dla dowolnej liczby zespolonej $z \in \mathbb{C}$ istnieje liczba $t \in [0, 2\pi)$ taka, że

$$z = |z|\exp(it) = |z|(\cos t + i \sin t).$$

Dla liczb $z \neq 0$ liczba t jest wyznaczona jednoznacznie, nazywamy ją *argumentem głównym* liczby z i oznaczamy $t = \operatorname{Arg} z$.

52. Oblicz $\cos i$, $\sin i$, $\cos(i + \pi/2)$; ♡ oblicz wartości funkcji sin i cos w punktach $\pi/6$, $\pi/3$, $\pi/4$.

---

53. Sprawdź bezpośrednio, że funkcje exp oraz sin spełniają równania Cauchy-Riemanna.

54. Oblicz pochodne funkcji (a) $f(z) = \exp(\frac{1}{\sin z})$; (b) $g(z) = \sin^3(2z)\exp(iz)$.