

55. Oblicz  $\int_{\gamma} z e^{iz} dz$ , gdzie  $\gamma(t) = 2e^{-it}$ ,  $t \in [0, \pi]$ .

56. Niech  $n \in \mathbb{Z}$ . Oblicz całkę  $\int_{\gamma} (z - a)^n dz$ , jeśli  $\gamma$

- (a) jest półokręgiem  $|z - a| = r$ ,  $0 \leq \arg(z - a) \leq \pi$  o początku w  $a + r$ ;
- (b) jest dodatnio zorientowanym okręgiem o środku w  $a$  i promieniu  $r$ ;
- (c) jest brzegiem kwadratu o środku w  $a$  i bokach równoległych do osi układu współrzędnych ( $n \neq -1$ ).

57. Oblicz całkę  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 - 4}$ , gdzie  $\gamma$  jest dodatnio zorientowanym okręgiem o środku w punkcie 1 i promieniu 2. *Wskazówka:* rozkład na ułamki proste.

58. Niech  $f$  będzie funkcją ciągłą w otoczeniu punktu  $a \in \mathbb{C}$ . Oblicz

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\varepsilon}} \frac{f(z)}{z - a} dz,$$

gdzie  $\gamma_{\varepsilon}$  jest dodatnio zorientowanym okręgiem o środku w  $a$  i promieniu  $\varepsilon$ .

59. Niech  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  będą drogami zamkniętymi, niech  $w \in \mathbb{C}$  oraz

$$|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |w - \gamma_2(t)|, \quad \text{dla } t \in [0, 1].$$

- (a) Pokaż, że wzór  $\gamma(t) = \frac{\gamma_1(t) - w}{\gamma_2(t) - w}$  określa drogę zamkniętą w  $\mathbb{C}$ .
- (b) Sprawdź, że  $|1 - \gamma(t)| < 1$  i wywnioskuj stąd, ile równa się  $\text{Ind}_{\gamma}(0)$ .
- (c) Obliczając z definicji  $\text{Ind}_{\gamma}(0)$  wywnioskuj, że  $\text{Ind}_{\gamma_1}(w) = \text{Ind}_{\gamma_2}(w)$ .

60. Niech  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z \leq 0, \text{Im } z = 0\}$ . Dla  $z \in \Omega$  określamy funkcję  $\text{Log}$  następująco

$$\text{Log } z = \int_{(1,z)} \frac{dw}{w}.$$

Sprawdź, że  $\text{Log} \in H(\Omega)$  i oblicz pochodną  $\text{Log}'$ . Uzasadnij, że  $\exp(\text{Log } z) = z$ , obliczając pochodną funkcji  $g(z) = \exp(\text{Log } z)/z$ . Oblicz  $\text{Log}(1 + i)$ ,  $\text{Log}(\exp(3\pi i/2))$ . Czy  $\text{Log}(zw) = \text{Log } z + \text{Log } w$ ?

*Uwaga:* Liczbę  $\text{Log } z$  nazywamy *logarytmem głównym*  $z$ .

61. Oblicz całki

$$\int_{\gamma} \frac{e^z \cos z dz}{(1 + z^2) \sin z}, \quad \int_{\gamma} \frac{\sin(z - 2) dz}{z - 2},$$

gdzie  $\gamma$  jest dodatnio zorientowanym okręgiem o środku w  $2 + i$  i promieniu  $\sqrt{2}$ .

62. Niech  $p, z_0 \in \mathbb{C}$  oraz  $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{p\})$ . Niech  $C(z, r)$  oznacza dodatnio zorientowany okrąg o środku w  $z$  i promieniu  $r$ . Uzasadnij, że  $\int_{C(p,r)} f(z) dz$  nie zależy od  $r$ , oraz że

$$\int_{C(z_0,r)} f(z) dz = \text{Ind}_{C(z_0,r)}(p) \cdot \int_{C(p,r)} f(z) dz, \quad \text{dla } r \neq |z_0 - p|.$$

63. Obliczając  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$  dla (odpowiednio sparametryzowanej) drogi zamkniętej  $\gamma$ , której obraz jest elipsą  $\frac{(\operatorname{Re} z)^2}{a^2} + \frac{(\operatorname{Im} z)^2}{b^2} = 1$ , uzasadnij, że

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}.$$

64. (*Lemat Jordana*) Niech  $\beta > 0$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq r_0, \operatorname{Im} z \geq \alpha\}$ ,  $f \in C(D)$  oraz  $f(z) \rightarrow 0$ , gdy  $|z| \rightarrow \infty$ . Wówczas

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} e^{i\beta z} f(z) dz = 0,$$

gdzie  $\gamma_r$  jest tą częścią okręgu o środku w 0 i promieniu  $r$ , która znajduje się w  $D$ .

65. Oblicz całki

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z(z-2i)} dz; \quad \int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2(z-2i)^3} dz,$$

gdzie  $\gamma$  jest dodatnio zorientowanym okręgiem (a) o środku w  $3i$  i promieniu 2; (b) o środku w  $-2i$  i promieniu 3.

66. Jeśli  $f_n \in H(\Omega)$  jest ciągiem funkcji zbieżnym do funkcji  $f$  jednostajnie na każdym zwartym podzbiórze zbioru  $\Omega$ , to  $f \in H(\Omega)$ .

67. Jeśli  $\Omega \subset \mathbb{C}$  jest otwarty,  $f \in C([a, b] \times \Omega)$  oraz  $f(t, \cdot) \in H(\Omega)$  dla każdego  $t \in [a, b]$ , to funkcja  $g(z) = \int_a^b f(t, z) dt$  jest holomorphyzna na  $\Omega$ . *Wskazówka:* Twierdzenie Morery.

68. Uzasadnij, że podane funkcje są holomorphyczne

$$f(z) = \int_{-1}^1 \frac{e^{tz}}{1+t^2} dt \quad \text{na } \mathbb{C}; \quad g(z) = \int_0^1 \frac{dt}{1+tz} \quad \text{na } \{z : \operatorname{Re} z > 0\};$$

$$h(z) = \int_0^{\infty} \frac{e^{tz}}{1+t^2} dt \quad \text{na } \{z : \operatorname{Re} z < 0\}.$$

69. Jeśli  $f \in H(D(a, r))$  dla pewnego  $r$ , to  $a$  jest  $m$ -krotnym zerem funkcji  $f$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $f^{(m)}(a) = 0$  oraz  $f^{(k)}(a) \neq 0$  dla  $0 \leq k < m$ .

70. Znajdź krotność zera  $z = 0$  dla funkcji

$$f_1(z) = (e^{z^2} - 1)z^2; \quad f_2(z) = 2 \cos z^2 + z^4 - 2; \quad f_3(z) = e^{\sin z} - 1; \quad f_4(z) = \sin^{2014}(z^{100}).$$

71. Czy istnieje funkcja holomorphyzna w otoczeniu 0 i taka, że (a)  $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}$  dla  $n \in \mathbb{N}$ ; (b)  $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3}$  dla  $n \in \mathbb{N}$ ?

72. Funkcja  $f(z) = \sin \frac{1}{z-1}$  ma ciąg zer zbieżny do 1, ale nie jest stała. Czy to nie sprzeczność z twierdzeniem o zerach?

73. Zbadaj, czy funkcja  $f$  ma funkcję pierwotną na  $\Omega$ , jeśli

(a)  $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$ ,  $\Omega = D(0, 1)$ ;

(b)  $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$ ,  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \overline{D(0, 1)}$ ;

(c)  $f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$ ,  $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ .