Funkcje analityczne **Lista 5**

74. Określ rodzaj osobliwości funkcji $f(z) = \dfrac{z - \pi i}{1 + e^z}$, $\quad g(z) = \exp \dfrac{1}{z-1}$.

75. Uzasadnij, że jeśli $f \in H(\mathbb{C})$ i f nie jest stała, to $f(\mathbb{C})$ jest gęsty w $\mathbb{C}$. *Wskazówka.* Twierdzenie Liouville'a.

76. Jeśli $f \in H(\mathbb{C})$ i jej część rzeczywista lub urojona jest funkcją ograniczoną z dołu lub z góry, to f jest stała. *Wskazówka do jednego z przypadków.* Twierdzenie Liouville'a dla funkcji e^f.

77. Niech $f, g \in H(\mathbb{C})$ spełniają nierówność $|f(z)| \le |g(z)|$ dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$. Co można wywnioskować stąd o funkcjach f i g?

78. Niech Ω będzie obszarem w $\mathbb{C}$ i $f \in H(\Omega)$. Przypuśćmy, że funkcja f jest różna od stałej, i że $|f|$ ma minimum lokalne w punkcie $z_0 \in \Omega$. Co można powiedzieć o wartości funkcji f w punkcie z_0?

79. Jeśli funkcja $f \in H(\Omega)$ ma zero krotności m w punkcie a, to funkcja $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ ma w punkcie a biegun rzędu m.

80. Jeśli funkcje $f, g \in H(\Omega)$ mają zera krotności, odpowiednio, m i n w punkcie a, to funkcja $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ ma w punkcie a:

    - biegun rzędu $n - m$, gdy $m < n$;
    - osobliwość usuwalną w punkcie a, gdy $m \ge n$. Ponadto rozszerzenie holomorficzne h na otoczenie a ma w punkcie a zero krotności $m - n$.

81. Jeśli f ma biegun rzędu 1 w punkcie a, to

$$\operatorname{res}(f; a) = \lim_{z \to a} f(z)(z - a).$$

Ogólniej, jeśli f ma biegun rzędu co najwyżej m w punkcie a, to

$$\operatorname{res}(f; a) = \lim_{z \to a} \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!},$$

gdzie $g(z) = (z - a)^m f(z)$.

82. Oblicz residua we wszystkich biegunach dla funkcji

$$f_1(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}; \quad f_2(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}; \quad f_3(z) = \frac{\sin 2z}{(1+z)^3}; \quad f_4(z) = \operatorname{tg} z.$$

83. Korzystając z twierdzenia o residuach oblicz całki

$$\text{(a)} \quad \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + a}{e^{it} - a}\, dt, \quad \text{dla } |a| \ne 1;$$

$$\text{(b)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\, dx}{1 + x^4}; \qquad \int_0^{\infty} \frac{x^2\, dx}{x^4 + 6x^2 + 13} = \frac{\pi}{4} |\operatorname{Im} a|, \quad \text{gdzie } a^4 + 6a^2 + 13 = 0;$$

$$\text{(c)} \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t\, dt}{2 - \cos t} = 2\pi(2 - \sqrt{3}); \qquad \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1 + \varepsilon \cos t)^2} = 2\pi(1 - \varepsilon^2)^{-3/2}, \quad \text{dla } |\varepsilon| < 1;$$

(d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin x\,dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{4e}$; $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x\,dx}{(1+x^2)^3} = \frac{7\pi}{8e}$; $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\xi x}\,dx}{1+x^2} = \pi e^{-|\xi|}$, $\xi \in \mathbb{R}$;

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax}\,dx}{e^x+1} = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}$, gdzie $0 < a < 1$.

Wskazówka do (e): całkować po brzegu prostokąta o wierzchołkach w $\pm R$, $\pm R + 2\pi i$.

84. Całkując $e^z z^{-n-1}$ wzdłuż okręgu jednostkowego, sprawdź, że

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos(nt - \sin t)\,dt = \frac{2\pi}{n!}, \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos t}\sin(nt - \sin t)\,dt = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

85. Uzasadnij, że jeśli $f \in C(D'(a,R))$ spełnia $\lim_{z\to a} f(z)(z-a) = A$, to

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} f(z)\,dz = iA(\beta - \alpha),$$

gdzie $\gamma_r(t) = a + re^{it}$ dla $t \in [\alpha, \beta]$.

86. Całkując funkcję $f(z) = \dfrac{1 - e^{2iz}}{z^2}$ po konturze złożonym z odcinków $\langle -R, -r\rangle$ i $\langle r, R\rangle$ oraz półokręgów o środku w 0 i promieniach r, R uzasadnij, że

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Uwaga: tutaj wystarczy twierdzenie Cauchy'ego.

87. Ile pierwiastków ma w Ω równanie $f(z) = 0$, jeśli

(a) $f(z) = z^4 + 3z + 1$, $\Omega = D(0,1)$ (*wsk.* tw. Rouché dla $g(z) = 3z$);

(b) $f(z) = z^4 + 3z + 1$, $\Omega = A(0,1,2)$,

(c) $f(z) = \sin z - z$, $\Omega = D(0,1)$ (*wsk.* rozwinięcie sin w szereg potęgowy).

88. ♡ Przypomnij (z wykładu z Analizy Matematycznej) definicję całki krzywoliniowej zorientowanej w $\mathbb{R}^2$ oraz twierdzenie Greena. Udowodnij twierdzenie Cauchy'ego:

$$f \in H(\Omega),\ \Omega \subset \mathbb{C} \text{ – gwiaździsty, } \gamma \text{ – droga zamknięta w } \Omega \implies \int_\gamma f(z)\,dz = 0,$$

używając twierdzenia Greena i równań Cauchy–Riemanna; sformułuj potrzebne założenia (mogą być inne niż w twierdzeniu Cauchy'ego na wykładzie).

89. Niech $f \in H(\Omega)$, $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$, $\gamma(t) = a + re^{it}$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$. Załóżmy, że $f \neq 0$ na γ^*. Jak wiemy, dla $p = 0$, całka

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)z^p}{f(z)}\,dz$$

jest równa liczbie zer funkcji f w $D(a,r)$, licząc wraz krotnościami. Jaka jest wartość tej całki dla $p = 1, 2, \ldots$? A jaka jest wartość gdy zastąpimy z^p przez $g(z)$, gdzie $g \in H(\Omega)$?