Funkcje analityczne **Lista 6**

90. Rozwiń funkcję f w szereg Laurenta w podanym pierścieniu.

    (a) $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$ na $A(-1,0,2)$, na $A(-1,2,\infty)$ oraz na $A(0,1,\infty)$;

    (b) $f(z) = (z^2+1)e^{1/z}$ na $A(0,0,\infty)$; (c) $f(z) = \frac{\sin(z^2)-z^2}{z^8}$ na $A(0,0,\infty)$.

91. Rozwijając funkcję $f(z) = \exp(z+z^{-1}) = e^z e^{1/z}$ w szereg Laurenta na $A(0,0,\infty)$ uzasadnij, że $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{2\cos t}\cos(nt)\,dt = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!(n+k)!}$, dla $n = 0,1,2,\ldots$.

92. Załóżmy, że $f(z) = \sum_{n=-\infty}^\infty a_n(z-p)^n$ dla $z \in A(p,0,r) = D'(p,r)$, gdzie $r > 0$ (czyli f ma w p osobliwość izolowaną). Znajdź warunek na współczynniki a_n konieczny i dostateczny do tego, by funkcja f miała w punkcie p: (i) osobliwość pozorną; (ii) biegun rzędu $m > 0$; (iii) osobliwość istotną. W przypadku (ii), ile wynosi $\operatorname{res}(f;p)$? Uzasadnij odpowiedzi.

93. Niech $F(z) = \sum_{n=0}^\infty f_n z^n$, gdzie (f_n) jest ciągiem Fibonacciego określonym wzorami

$$\begin{aligned} f_0 &= f_1 = 1, \\ f_{n+2} &= f_{n+1} + f_n, \quad \text{dla } n = 0,1,\ldots. \end{aligned}$$

    (a) Sprawdź, że szereg określający F ma dodatni promień zbieżności.

    (b) Uzasadnij, że $z^2F(z) + zF(z) = F(z) - 1$, czyli $F(z) = \dfrac{1}{1-z-z^2}$.

    (c) Z ogólnej teorii wiemy, że $f_n = \operatorname{res}\left(\dfrac{1}{z^{n+1}(1-z-z^2)};0\right)$. Oblicz to residuum obliczając residua w pozostałych biegunach oraz granicę

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{dz}{z^{n+1}(1-z-z^2)},$$

    gdzie $C_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0,2\pi]$.

    Uwaga. Zwykle używaliśmy twierdzenia o residuach do obliczania całek. Tutaj postępujemy odwrotnie: obliczamy bezpośrednio całkę i z twierdzenia o residuach dostajemy residuum.

94. Oblicz

$$\int_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{x(x^2+1)} = \pi(1-1/e).$$

    Uwaga na osobliwość (pozorną) w 0.

---

95. Przypomnijmy, że całka $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ jest zbieżna dla $x > 0$ i $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

    (a) Uzasadnij, że funkcja $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$ jest dobrze określona i holomorficzna na $\Omega = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$. Uwaga: dla $t > 0$ i $w \in \mathbb{C}$ określamy $t^w := e^{w\ln t}$. *Wskazówka*: Twierdzenia Morery i Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej.

    (b) Uzasadnij, że $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ dla $z \in \Omega$.

    (c) Korzystając z (b) pokaż, że funkcję Γ można rozszerzyć do funkcji holomorficznej na $\mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\ldots\}$. Co można powiedzieć o osobliwościach funkcji Γ?

(d) (i) Oblicz całkę

$$\int_0^\infty \frac{z^{2n}}{z^{4n}+1}\,dz = \frac{\pi}{4n\sin\frac{(2n+1)\pi}{4n}}, \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Propozycja. Całkować po konturze złożonym z odcinków $\langle e^{\pi i/2n}R, 0\rangle$, $\langle 0, R\rangle$ i łuku okręgu o środku w 0 i promieniu R.

(ii) Podstawiając w (i) $z = \left(\frac{y}{1-y}\right)^{1/4n}$, gdzie $y \in (0,1)$, uzasadnij, że

$$\Gamma\Big(\frac{2n+1}{4n}\Big)\Gamma\Big(1-\frac{2n+1}{4n}\Big) = \frac{\pi}{\sin\frac{(2n+1)\pi}{4n}}.$$

Przypomnienie. $B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$ dla $p, q > 0$.

(iii) Uzasadnij, że dla dowolnych $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

(e) Wywnioskuj, że funkcja $\frac{1}{\Gamma}$ rozszerza się do funkcji całkowitej, która ma zera tylko w punktach $0, -1, -2, \ldots$. Znajdź krotności tych zer.