# Analiza rzeczywista i zespolona **Lista 2**

12. Wskaż błąd w następującym rozumowaniu. Niech $G \subset \mathbb{R}$ będzie niepustym zbiorem otwartym. Wówczas $G = \bigcup_{n \in T} (a_n, b_n)$, gdzie $T \subset \mathbb{N}$ jest pewnym zbiorem indeksów, zaś $(a_n, b_n)$, gdzie $-\infty \leq a_n < b_n \leq \infty$, jest rodziną parami rozłącznych przedziałów. Ponieważ brzeg każdego przedziału $(a_n, b_n)$ jest co najwyżej dwupunktowy, więc brzeg $G$ jest przeliczalny, a więc miary Lebesgue'a zero.

    Czy prawdą jest, że każdy zbiór otwarty $G \subset \mathbb{R}$ ma brzeg miary zero?

13. Niech $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d, m)$. Wykaż, że

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|\, dy < \infty, \qquad \text{dla p.w. } x \in \mathbb{R}^d.$$

    Dla takich $x$ przyjmujemy $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\, dy$ ($f * g$ nazywamy *splotem* funkcji $f$ i $g$). Uzasadnij, że

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.$$

    *Wsk.* Twierdzenie Fubiniego; kwestia mierzalności jest dość subtelna (zob. Rudin, tw. 7.14).

14. Dla $f \in L^p(\mathbb{R}^d, m)$ określamy *przesunięcie* wzorem $f_y(x) = f(x-y)$. Uzasadnij, że gdy $1 \leq p < \infty$, to odwzorowanie

$$\mathbb{R}^d \ni x \mapsto f_y \in L^p(\mathbb{R}^d, m)$$

    jest jednostajnie ciągłe. *Wsk.* Najpierw uzasadnij to dla funkcji $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ (ciągłych o nośniku zwartym).

15. Jeśli $f \in L^p(\mathbb{R}^d, m)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d, m)$, gdzie $1 \leq p, q \leq \infty$ oraz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, to splot $f * g$ jest dobrze określony i ciągły na $\mathbb{R}^d$.

16. Jeżeli $A, B \subset \mathbb{R}$, $m(A) > 0$ oraz $m(B) > 0$, to $A + B$ zawiera nietrywialny odcinek. (Jest to lemat Steinhausa. *Wsk.* Użyć punktów gęstości lub splotu.)

17. Niech $C$ będzie zbiorem Cantora. Czy $C + C$ zawiera przedział?

18. Podaj rozkład Lebesgue'a miary Lebesgue'a na $[0, 2]$ względem miary Lebesgue'a na $[1, 3]$.

19. Jeżeli miary $\sigma$-skończone spełniają nierówność $0 \leq \nu \leq \mu$, to $d\nu = f d\mu$, gdzie $0 \leq f \leq 1$ ($\mu$ p.w.).

20. Podaj $|\nu|$, jeżeli $\nu(E) = \int_E f d\mu$, dla miary $\mu \geq 0$ i $f \in L^1(\mu)$.

21. Jeżeli $\mu$ jest miarą zespoloną, to $d\mu = h d|\mu|$, gdzie $|h| = 1$.

22. Użyj twierdzenia Radona-Nikodyma dla dowodu rozkładu Hahna miary rzeczywistej (skończonej).

23. Niech $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(X, \mathcal{F}, \mu)$ będą $\sigma$-skończonymi przestrzeniami miarowymi, i niech $\mathcal{F}$ będzie pod-$\sigma$-algebrą $\mathcal{A}$. Dla każdego $u \in L^1(\mathcal{A})$ istnieje (warunkowa wartość oczekiwana) $u^{\mathcal{F}} \in L^1(\mathcal{F})$ o własności,

$$\int_F u^{\mathcal{F}} d\mu = \int_F u d\mu\ , \quad F \in \mathcal{F}\ .$$