Analiza rzeczywista i zespolona **Lista 3**

Dla funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ oznaczamy przez T_f jej *funkcję wahania całkowitego*, określoną wzorem

$$T_f(x) = \sup \sum_{j=1}^{N} |f(x_j) - f(x_{j-1})|, \qquad x \in \mathbb{R},$$

gdzie supremum brane jest po wszystkich N i wszystkich $-\infty < x_0 < x_1 < \ldots < x_N = x$. Mówimy, że f ma *wahanie ograniczone*, jeśli T_f jest funkcją ograniczoną; piszemy $f \in \mathrm{BV}$ oraz $V_f(\mathbb{R}) = \lim_{x\to\infty} T_f(x)$.

Jeśli $f \in \mathrm{BV}$ jest lewostronnie ciągła w każdym punkcie $\mathbb{R}$ oraz $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, to piszemy $f \in \mathrm{NBV}$.

Dla funkcji $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ określamy podobnie $T_f^a(x)$ dla $x \in [a, b]$, tym samym wzorem co wyżej, ale tym razem supremum bierzemy po $a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_N = x$. Jeśli T_f^a jest ograniczona na $[a, b]$, to piszemy $f \in \mathrm{BV}([a, b])$ oraz $V_f([a, b]) = T_f^a(b)$.

Przez $\mathrm{AC}([a, b])$ oznaczamy zbiór wszystkich funkcji *absolutnie ciągłych* na $[a, b]$, tj. takich, że

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall (\alpha_j, \beta_j) \subset [a, b] : \sum_{j=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j) < \delta \implies \sum_{j=1}^{n} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| < \varepsilon,$$

przy czym przedziały (α_j, β_j) powyżej są parami rozłączne.

---

24. Niech μ będzie miarą rzeczywistą (tj. znakowaną miarą skończoną), a λ miarą zespoloną na X. Wówczas $\mu \perp \lambda$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu^- \perp \lambda$ oraz $\mu^+ \perp \lambda$.

25. Jeżeli $f(x) = \mu((-\infty, x))$ dla pewnej miary zespolonej μ, to f jest ciągła w tych i tylko tych punktach x, dla których $\mu(\{x\}) = 0$.

26. Funkcje monotoniczne na $\mathbb{R}$ mają wszędzie granice lewo i prawostronne, a zbiór punktów nieciągłości jest co najwyżej przeliczalny.

27. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Jeżeli $x < y$ i $T_f(y) < \infty$, to $|f(y) - f(x)| \le |T_f(y) - T_f(x)|$.

28. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest różnicą dwóch funkcji monotonicznych wtedy i tylko wtedy, gdy $f|_{[a,b]} \in \mathrm{BV}([a, b])$ dla dowolnych $-\infty < a < b < \infty$.

29. Jeżeli $f \in \mathrm{NBV}$, to $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in \mathrm{NBV}$.

30. Jeżeli $f, g \in \mathrm{BV}$, to $fg \in \mathrm{BV}$.

31. Udowodnij, że dla $a, b > 0$ funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin\left(x^{-b}\right) & \text{dla } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{dla } \quad x = 0, \end{cases}$$

ma wahanie ograniczone na $[0, 1]$ wtedy i tylko wtedy gdy $a > b$.

32. Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ i niech $c \in (a, b)$. Udowodnij, że $f \in BV([a, b])$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f \in BV([a, c])$ i $f \in BV([c, b])$. Ponadto, jeżeli $f \in BV([a, b])$, to $V_f([a, b]) = V_f([a, c]) + V_f([c, b])$ dla dowolnych $a < c < b$.

33. Udowodnij, że obcięcie funkcji absolutnie ciągłej do przedziału ograniczonego jest funkcją o wahaniu ograniczonym na tym przedziale. Podaj przykład funkcji f, która jest absolutnie ciągła, ale $f \notin \mathrm{BV}$ (na $\mathbb{R}$).

34. Jeśli $f, g \in \mathrm{AC}([a,b])$, to $fg \in \mathrm{AC}([a,b])$ oraz $\int_a^b f'g\,dx = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b fg'\,dx$.

35. Sprawdź, że $\mathrm{BV}(\mathbb{R})$, $\mathrm{BV}([a,b])$ oraz $\mathrm{AC}(\mathbb{R})$ i $\mathrm{AC}([a,b])$ (zdefiniowane w naturalny sposób) są przestrzeniami liniowymi.

36. Sprawdź, że $V_f(\mathbb{R})$ jest normą na NBV. Czy jest to też norma na BV?

37. Jeśli $f \in \mathrm{AC}(\mathbb{R})$, to $V_f(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|\,dx$ (każde z tych wyrażeń może być ∞).

38. Przestrzeń $\mathrm{AC}([a,b])$ z normą

$$\|f\| = \int_a^b (|f(x)| + |f'(x)|)\,dx$$

jest przestrzenią Banacha.

39. Wiemy, że jeśli μ jest dodatnią miarą borelowską na $\mathbb{R}$, skończoną na zbiorach zwartych, to

$$\mu(E) = \inf\{\mu(G) : G \supset E \text{ i } G \text{ jest otwarty}\} = \sup\{\mu(K) : K \subset E \text{ i } K \text{ jest zwarty}\}.$$

Udowodnij, że jeśli μ_j $(j = 1, 2)$ są miarami zespolonymi na $\mathbb{R}$ i zbiór E jest borelowski, to istnieje ciąg zbiorów otwartych $G_n \supset E$ takich, że $\mu_j(G_n) \to \mu_j(E)$ przy $n \to \infty$.

40. (a) Znajdź $f \in \mathrm{NBV}$ i stałą c takie, że $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{sgn} x + c$ dla p.w. $x \in \mathbb{R}$.
    (b) Podaj rozkład f na część osobliwą i absolutnie ciągłą.
    (c) Podaj rozkład miary μ odpowiadającej funkcji f na część osobliwą i absolutnie ciągłą; jaka jest gęstość części absolutnie ciągłej?

41. Przedstaw funkcję $f(x) = \max(0, 1 - |x|)$ jako różnicę dwóch funkcji rosnących należących do przestrzeni NBV; rozwiązanie może być na rysunku.

42. Niech $f \in AC([a,b])$ i $g(x) = |f(x)|^p$ dla $p > 1$. Sprawdź, że pochodna $g'(x)$ istnieje w prawie każdym punkcie $x \in [a,b]$ i oblicz ją. Czy można tu korzystać z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej?