Analiza rzeczywista i zespolona Lista 4

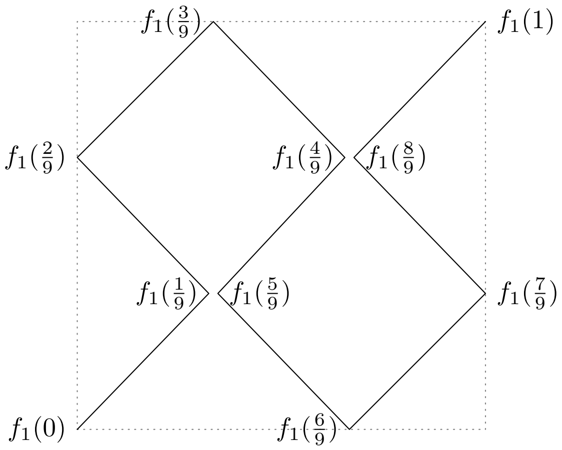
43. Długość wykresu $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ jest z definicji wahaniem całkowitym funkcji $[0,1] \ni t \mapsto t + if(t)$. Udowodnij, że ta długość jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy $f \in BV$. Udowodnij, że jeżeli f jest ciągła i niemalejąca, $f(0) = 0$, a f_s jest częścią osobliwą funkcji f, to długość wykresu wynosi $f_s(1) + \int_0^1 \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt$. Ile wynosi długość wykresu funkcji Cantora (na $[0,1]$)?

44. Niech $X = \mathbb{R}^2$, oraz niech $\mathcal{T}$ będzie rodziną prostokątów
$$T = (a,b] \times (c,d]$$
i niech $\tau(T)$ będzie polem T. Niech μ^* będzie miarą zewnętrzną otrzymaną z $\mathcal{T}$ i τ za pomocą Metody I. Udowodnij, że μ^* jest metryczną miarą zewnętrzną (dwuwymiarową miarą Lebesgue'a).

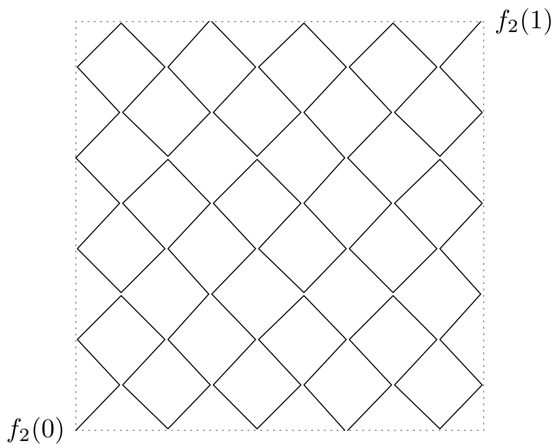
45. Niech $\mathcal{T}$ będzie rodziną zbiorów zawierającą $\emptyset$ i przedziały otwarte w $X = (-1,1)$ i niech $\tau((a,b)) = |b^2 - a^2|$. Stosujemy Metodę I otrzymując μ^* i Metodę II otrzymując μ_0^*. Opisz rodzinę zbiorów μ^*–mierzalnych. Wyznacz $\mu^*((0,1))$ oraz $\mu_0^*((0,1))$.

46. Niech $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T}$ zawiera $\emptyset$ i przedziały otwarte. Niech $\tau(\emptyset) = 0$ i $\tau((a,b)) = (b-a)^{-1}$ dla wszystkich innych $(a,b) \in \mathcal{T}$. Niech μ_1, μ_2 będą miarami otrzymanymi z $\mathcal{T}$ i τ Metodą I i II, odpowiednio. Uzasadnij, że $\mu_1(E) = 0$ dla wszystkich $E \subset X$, oraz $\mu_2(E) = \infty$ dla każdego zbioru niepustego $E \subset X$.

47. Konstruujemy funkcje ciągłe $f_n : [0,1] \to [0,1]^2$: $f_0(x) = (x,x)$, f_1 – jak na rysunku, tj. $f_1(x) = (3x, 3x)$ dla $x \in [0, \frac{1}{9}]$, $f_1(x) = (\frac{2}{3} - 3x, 3x)$ dla $x \in [\frac{1}{9}, \frac{2}{9}]$, itd. Parametryzacja jest zawsze taka, żeby norma pochodnej $\|f_n'(x)\|$ była stała dla $x \in (0,1) \setminus (9^{-n}\mathbb{Z})$.



Dla czytelności punkty $f_1(\frac{1}{9})$ i $f_1(\frac{5}{9})$ zostały rozsunięte, mimo że $f_1(\frac{1}{9}) = f_1(\frac{5}{9})$. Podobnie $f_1(\frac{4}{9}) = f_1(\frac{8}{9})$.



Tu również niektóre punkty zostały rozsunięte.

Przekonaj się, że

(a) Jeśli $m \geq n$, to funkcja f_m na odcinku postaci $[k9^{-n}, (k+1)9^{-n}]$ (gdzie $k \in \{0, 1, ..., 9^n - 1\}$) przyjmuje wartości w pewnym kwadracie (takim samym dla każdego m) o boku długości 3^{-n}. Zatem $\|f_m - f_n\|_\infty \leq \sqrt{2} \cdot 3^{-n}$.

(b) Funkcja $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ jest dobrze określona i ciągła.

(c) Obraz $f([0,1])$ jest gęsty w $[0,1]^2$, a więc $f([0,1]) = [0,1]^2$.

Określona powyżej funkcja f nie jest różnowartościowa. Czy istnieje różnowartościowa funkcja ciągła $f : [0,1] \to [0,1]^2$ taka, że $f([0,1]) = [0,1]^2$?