Analiza rzeczywista i zespolona **Lista 6**

56. Udowodnij, że jeżeli $f \in L^1$ i $f > 0$, to $|\hat{f}(y)| < \hat{f}(0)$ dla $y \neq 0$.

57. Wyznacz transformatę Fouriera indykatora przedziału.

58. Oblicz $\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} e^{itx} \sin(\lambda t)/t \, dt$, gdzie $x \in R$, $\lambda > 0$.

59. Podaj przykład funkcji $f \in L^2$ takiej, że $f \notin L^1$ ale $\hat{f} \in L^1$.

Grupą topologiczną nazywamy grupę z określoną na niej topologią taką, że działania grupowe $G \times G \ni (x, y) \mapsto xy \in G$ oraz $G \ni x \mapsto x^{-1}$ są ciągłe. Będziemy rozważać tylko lokalnie zwarte grupy abelowe (w skrócie LCA). Lokalna zwartość oznacza, że każdy punkt ma otoczenie, którego domknięcie jest zwarte (oraz przestrzeń ma własność Hausdorffa).

60. Sprawdź, że *torus* $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ jest lokalnie zwartą grupą topologiczną (gdzie działaniem jest mnożenie liczb zespolonych, topologia jest indukowana przez metrykę euklidesową). Podobnie, lokalnie zwartymi grupami topologicznymi są $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) = (\{0, 1, \ldots, n-1\}, + \bmod n)$, gdzie $n = 2, 3, \ldots$, z naturalnymi topologiami.

61. Niech G będzie grupą LCA. *Charakterem* nazywamy dowolny ciągły homomorfizm $\phi : G \to \mathbb{T}$. Sprawdź, że zbiór $\hat{G}$ wszystkich charakterów G spełnia

$$\phi, \psi \in G \implies \phi\psi \in G, \qquad \phi \in G \implies \phi^{-1} \in G, \text{ gdzie } \phi^{-1}(x) := \phi(x)^{-1},$$

i z określonymi powyżej działaniami jest grupą, tzw. grupą dualną do G. Jaki jest element neutralny $\hat{G}$?

62. Jeśli $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, to dla każdego $\xi \in \hat{G}$ istnieje $k \in G$ takie, że

$$\xi(x) = e^{\frac{2\pi ikx}{n}}, \quad x \in G.$$

Wywnioskuj, że $\hat{G}$ jest izomorficzna z G.

63. Jeśli $G = (\mathbb{R}, +)$ (z naturalną topologią), to dla każdego $\xi \in \hat{G}$ istnieje $t \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\xi(x) = e^{itx}.$$

Wywnioskuj, że $\hat{G}$ jest izomorficzna z G.

64. Jeśli $G = (\mathbb{Z}, +)$, to $\hat{G}$ jest izomorficzna z $\mathbb{T}$.

65. Grupa $\hat{T}$ jest izomorficzna z $(\mathbb{Z}, +)$.