

LISTY ZADAŃ DO KURSU ANALIZA MATEMATYCZNA 1 (MAT 1637, 1644)

Zadania przeznaczone są do rozwiązywania na ćwiczeniach oraz samodzielnie. Dwie dodatkowe listy: POWTÓRKA 1 i POWTÓRKA 2 to przygotowanie do kolokwii. Dla kursu MAT 1644 listą uzupełniającą jest lista mgr. J. Pietraszki. Zadania z egzaminów na ocenę celującą z lat poprzednich można znaleźć na stronie Wydziału Matematyki: www.pwr.edu.pl.

LISTA 0 (materiał do samodzielnego powtórzenia).

Działania w zbiorze liczb rzeczywistych

W zadaniach 0.2 – 0.5 $n \in \mathbb{N}$, natomiast a, b, x, y są liczbami rzeczywistymi, dla których występujące w zadaniach wyrażenia i wykonywane przekształcenia mają sens.

0.1. Przypomnieć kolejność wykonywania działań w wyrażeniach bez nawiasów oraz w wyrażeniach z nawiasami. Obliczyć wartość wyrażenia: $4 + 6 : 2 \cdot 3 - 8 \cdot 2$. Wstawić nawiasy tak, aby wartość otrzymanego wyrażenia była równa.

(a) -1 , (b) -11 , (c) -10 .

0.2. Uzupełnić i zapamiętać wzory „skróconego mnożenia”:

(a) $(a + b)^2 = \dots$, (b) $(a + b)^3 = \dots$, (c) $(a + b)(a - b) = \dots$, (d) $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = \dots$.

Czy można w powyższych wyrażeniach zastąpić „ b ” przez „ $-b$ ”? Co otrzymamy?

Uprościć wyrażenia wymierne:

(a) $\frac{3a^2 - 6ab + 3b^2}{6a^2 - 6b^2}$, (b) $\frac{9 + 6x + x^2}{x^2 - 9}$, (c) $\frac{a^3 + 8}{a^2 - 4}$, (d) $\frac{1 - x^3}{3x^2 + 3x + 3}$,

(e) $\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^4 - 2x^2 + 1}$, (f) $\frac{2x^2 + 4xy + 2y^2}{9x^2 - 9y^2}$, (g) $\frac{x^3 + x^2 + 2x + 2}{x^4 + 4x^2 + 4}$.

0.3. Zapisać wyrażenia w prostszej postaci podając wykorzystywane prawa działań na potęgach

(a) $\frac{2^n + 3 \cdot 2^{n+2}}{4^{2n}}$, (b) $\frac{(\sqrt{2})^{3n+2} - (\sqrt{8})^n}{2^n}$, (c) $\frac{21 \cdot 27^n}{9^{n+2} + 3^{2n+1}}$, (d) $\left(\frac{1}{\sqrt{a^3}} \cdot b \cdot \sqrt{\frac{b^2}{a}} \cdot \sqrt[3]{a^2}\right)^3$.

0.4. Wykonać działania. Wynik zapisać w najprostszej postaci.

(a) $\frac{b}{ay + ax} - \frac{a}{by + bx}$, (b) $\frac{1}{a - b} - \frac{3ab}{a^3 - b^3} - \frac{b - a}{a^2 + ab + b^2}$,

(c) $\frac{8x}{x - 9x^3} + \frac{3x}{x + 3x^2} - \frac{2 - 6x}{(1 - 3x)^2}$, (d) $\frac{x\sqrt{4 - x^2} - (2 - x^2) \cdot \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}}{4 - x^2}$.

0.5. W podanych wyrażeniach usunąć niewymierność z mianownika

(a) $\frac{1}{4 + \sqrt{1 + x}}$, (b) $\frac{n - 2}{\sqrt{n} + \sqrt{2}}$, (c) $\frac{n + 1}{\sqrt{5n + 4} - \sqrt{4n + 3}}$,
(d) $\frac{a - b}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}$, (e) $\frac{x}{\sqrt[3]{x + 1} + \sqrt[3]{x - 1}}$, (f) $\frac{n - 1}{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n} + 1}$.

LISTA 1.
(na 4 ćwiczenia)

Powtórzenie i uzupełnienie wiadomości o funkcjach

1.1. Zdanie logiczne. Forma zdaniowa. Kwantyfikatory.

Dla zdań, będących zdaniami logicznymi, podać ich wartość logiczną.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \frac{6}{4} \geq \frac{3}{2}, & \text{(b)} x^2 - 7 < 0, & \text{(c)} \bigwedge_{x \in \mathbf{R}} x^2 - 7 < 0, \\ \text{(d)} \bigvee_{x \in \mathbf{R}} x^2 - 7 < 0, & \text{(e)} \bigvee_{x \in \mathbf{R} - \{0, -2\}} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}, & \text{(f)} \bigwedge_{x \in \mathbf{R}} \bigvee_{y \in \mathbf{R}} x^2 - y^2 = 0. \end{array}$$

1.2. Negacja. Równoważność. Prawa de Morgana dla koniunkcji i alternatywy.

Zapisać przy użyciu spójników logicznych „i”, „lub” rozwiązanie równania (nierówności). Zaznaczyć na płaszczyźnie zbiór punktów, których współrzędne spełniają podany warunek.

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} (x+3)(y-2) = 0, & \text{(b)} (x+3)(y-2) \neq 0, & \text{(c)} (x+3)(y-2) > 0, & \text{(d)} x^2 - 4y^2 < 0, \\ \text{(e)} \frac{a+b}{a-b} = 0, & \text{(f)} \frac{a+2}{a-b+1} > 0, & \text{(g)} \frac{2a+b}{a+b} \leq 0, & \text{(h)} \frac{a^2+b-1}{a^2-b^2} \geq 0. \end{array}$$

1.3. Implikacja. Twierdzenie. Prawo kontrpozycji.

(A) Prawdziwe jest twierdzenie:

Jeśli liczba naturalna jest podzielna przez 12, to jest podzielna przez 3.

Wskażać założenie oraz tezę twierdzenia.

Na podstawie powyższego twierdzenia podać:

- (a) warunek wystarczający podzielności przez 3. Dlaczego nie jest to warunek konieczny?
- (b) warunek konieczny podzielności przez 12. Dlaczego nie jest to warunek wystarczający?
- (c) Liczba naturalna nie jest podzielna przez 12. Czy twierdzenie pozwala wyciągnąć wniosek o podzielności tej liczby przez 3?
- (d) Liczba naturalna jest podzielna przez 3. Czy twierdzenie pozwala wyciągnąć wniosek o podzielności tej liczby przez 12?
- (e) Liczba naturalna nie jest podzielna przez 3. Czy twierdzenie pozwala wyciągnąć wniosek o podzielności tej liczby przez 12?
- (f) Sformułować warunek konieczny i wystarczający podzielności przez 3.

(B) Niech $x, y \in \mathbf{R}$. Prawdziwa jest implikacja:

$$(x > 0 \text{ i } y > 0) \implies (xy > 0).$$

Wskażać założenie oraz tezę twierdzenia.

(a) Wiadomo, że $\alpha > 1$ i $\beta > -1$. Czy twierdzenie pozwala wyciągnąć wniosek o znaku iloczynu $(\alpha - 1) \cdot (\beta + 1)$? A o znaku iloczynu $\alpha \cdot \beta$? Podać przykłady.

(b) Wiadomo, że $ab > 0$. Czy twierdzenie pozwala wyciągnąć wniosek o znaku liczby a ? Podać przykłady.

(c) Wiadomo, że $uv \leq 0$. Jaki wniosek o liczbach u i v pozwala wyciągnąć twierdzenie?

1.4. Prawa de Morgana dla kwantyfikatorów.

Zapisać w równoważnej postaci zdania:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \neg \left(\bigwedge_{x \in \mathbf{R}} 2^x = 2^{-x} \right), & \text{(b)} \quad & \neg \left(\bigvee_{x < 0} x^2 = x^4 \right), \\ \text{(c)} \quad & \neg \left(\bigvee_{M \in \mathbf{R}} \bigwedge_{n \in \mathbf{N}} \frac{n^2 + 1}{n} < M \right), & \text{(d)} \quad & \neg \left(\bigwedge_{\epsilon > 0} \bigvee_{n_0 \in \mathbf{N}} \bigwedge_{n \in \mathbf{N}} (n > n_0) \implies \left(\frac{n}{n+5} < \epsilon \right) \right). \end{aligned}$$

1.5. Wyznaczyć dziedziny naturalne funkcji. Zbadać, która z nich jest parzysta, która nieparzysta, a która nie ma żadnej z tych własności.

$$\text{(a)} \quad f(x) = \frac{|x| + 3}{x^2 - 9}, \quad \text{(b)} \quad f(x) = \frac{x}{6x^2 - x - 1}, \quad \text{(c)} \quad f(x) = \sqrt{3x - x^3}, \quad \text{(d)} \quad f(x) = \sqrt{8 - \frac{1}{x^3}}.$$

1.6. Przekształcając wykres odpowiedniej funkcji liniowej narysować wykres podanej funkcji. Odczytać z wykresu zbiór wartości.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & f(x) = |4 - 2x|, & \text{(b)} \quad & f(x) = 4 - 2|x|, \\ \text{(c)} \quad & f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4}, & \text{(d)} \quad & f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dla } |x| \leq 1 \\ 1 & \text{dla } |x| > 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

1.7. Przekształcając wykres funkcji $y = ax^2$ naszkicować wykres funkcji $y = f(x)$. Odczytać z wykresu zbiór wartości.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & f(x) = x^2 - 4x + 5, & \text{(b)} \quad & f(x) = x^2 - 2|x| + 1, \\ \text{(c)} \quad & f(x) = -4 - 4x - 2x^2, & \text{(d)} \quad & f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 3x). \end{aligned}$$

1.8. Przekształcając wykres funkcji $y = \frac{a}{x}$ lub $y = \frac{a}{x^2}$ naszkicować wykres funkcji $y = f(x)$. Odczytać z wykresu zbiór wartości.

$$\text{(a)} \quad f(x) = \frac{x}{x-1}, \quad \text{(b)} \quad f(x) = \frac{x-1}{x+1}, \quad \text{(c)} \quad f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}, \quad \text{(d)} \quad f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 4x + 4}.$$

1.9. Napisać wzory określające funkcje złożone $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$ dla podanych funkcji f i g . Naszkicować wykresy funkcji $y = f(g(x))$ oraz $y = g(f(x))$.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & f(x) = x^2, \quad g(x) = x - 2, & \text{(b)} \quad & f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = 4x^2, \\ \text{(c)} \quad & f(x) = |x|, \quad g(x) = \frac{1}{x+1}, & \text{(d)} \quad & f(x) = x^2 - 2, \quad g(x) = \operatorname{sgn} x. \end{aligned}$$

1.10. Zaproponować przedstawienie funkcji złożonych w postaci $g \circ h$. Czy jest tylko jedna para funkcji g, h takich, że $f = g \circ h$?

$$\text{(a)} \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 16}, \quad \text{(b)} \quad f(x) = \frac{1}{x^4 + 3}, \quad \text{(c)} \quad f(x) = 4x^2 + 12x.$$

1.11. Obliczyć

$$\log_2 2\sqrt{2}, \quad \log 0,01, \quad \log_3 2 - \log_3 18, \quad 3\log 5 + 0,5\log 64, \quad \log_3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{6},$$
$$\ln e^3, \quad 2^{\log_2 3}, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 5}, \quad 3^{\log_{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{6}}{2}}, \quad e^{2\ln 10}, \quad e^{1-\ln 10}, \quad \log_2 3 \cdot \log_3 8.$$

1.12. Zaznaczyć na płaszczyźnie zbiór punktów, których współrzędne (x, y) spełniają podany warunek

$$(a) \log_2 y = \log_2 x + \log_2 3, \quad (b) \log_{0,5} y = 2\log_{0,5}(x+1), \quad (c) \log |y| = \log |x| + \log 0,5.$$

1.13. Naszkicować wykresy funkcji

$$(a) f(x) = 2^{|x|}, \quad (b) f(x) = \left| \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1 \right|, \quad (c) f(x) = 1 + \frac{1}{e^x}, \quad (d) f(x) = -e^{-|x|},$$

$$(e) f(x) = \log_2(x-1), \quad (f) f(x) = \left| \log_{0,5} x \right|, \quad (g) f(x) = \ln |x|, \quad (h) f(x) = \ln x^2.$$

1.14. Rozwiązać równania i nierówności

$$(a) \left(\frac{1}{2}\right)^{(x-2)^2-5x} = \left(\frac{1}{4}\right)^5, \quad (b) 4^x + 24 = 5 \cdot 2^{x+1}, \quad (c) |2^x - 5| < 2,$$

$$(d) |3\log x - 1| = 2, \quad (e) \log_2(x+1) - \log_2 x < 1, \quad (f) \ln^2 x + \ln x \geq 2.$$

1.15. Wyprowadzić wzór określający funkcję odwrotną do funkcji f . Naszkicować w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = f^{-1}(x)$.

$$(a) f(x) = \log_2(x+1), \quad (b) f(x) = 1 - 2^x, \quad (c) f(x) = 2 - \sqrt{x},$$

$$(d) f(x) = x^2 - 2x + 2 \quad \text{dla } x \geq 1, \quad (e) f(x) = x^2 - 2x + 2 \quad \text{dla } x \leq 1,$$

$$(f) f(x) = 2^x - 2^{-x}, \quad (g) f(x) = 3^{1/x}.$$

1.16. Wykorzystując okresowość funkcji i koło trygonometryczne obliczyć wartości wyrażeń

$$(a) \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{4}{3}\pi, \quad (b) \sin \frac{13}{6}\pi + \sin \frac{11}{3}\pi, \quad (c) \cos \frac{14}{3}\pi + \cos \frac{19}{6}\pi,$$

$$(d) \sin \left(-\frac{9}{4}\pi\right) + \cos \left(-\frac{13}{4}\pi\right), \quad (e) \sin \frac{17}{2}\pi + \cos \frac{17}{2}\pi, \quad (f) \operatorname{tg} \frac{20}{3}\pi + \operatorname{ctg} \frac{19}{3}\pi.$$

1.17. Udowodnić tożsamości. Określić ich dziedziny.

$$(a) \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad (b) \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad (c) \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad (d) \sin x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},$$

$$(e) 1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x = \frac{\sin x + \cos x}{\cos^3 x}, \quad (f) \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 0,5 \sin^2 2x.$$

1.18. Krzywą daną równaniem $y = a \sin(bx + c) + d$ dla ustalonych parametrów $a \neq 0, b \neq 0, c, d$ nazywamy sinusoidą. Uzasadnić, że każda z poniższych krzywych jest sinusoidą i naszkicować ją.

(a) $y = \sin x \cos x$, (b) $y = (\sin x + \cos x)^2$, (c) $y = \cos^2 x$.

1.19. Naszkicować wykres funkcji $y = f(x)$. Odczytać z wykresu okres podstawowy oraz zbiór wartości funkcji.

(a) $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, (b) $f(x) = \sin x + |\sin x|$, (c) $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, (d) $f(x) = |\operatorname{ctg}(\pi x)|$.

1.20. Rozwiązać równania i nierówności.

(a) $\cos 2x = 0$, (b) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$, (c) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$,

(d) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 0$, (e) $\cos \frac{x}{3} > 0$, (f) $\operatorname{ctg}^2 x < 1$.

1.21. Obliczyć wartości wyrażeń

(a) $w = \arcsin \frac{x}{2} - \arccos \frac{x}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, jeśli $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{6}$;

(b) $w = \arcsin(-x) + \arccos 2x + \operatorname{arctg} 2x$, jeśli $\arccos x = \frac{2\pi}{3}$;

(c) $\operatorname{tg}\left(\arccos \frac{1}{3}\right)$; (d) $\sin\left(\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{8}{17}\right)$.

1.22. Rozwiązać równania wykorzystując funkcje cyklotometryczne

(a) $\operatorname{tg} 2x = 5$, (b) $\sin x = \frac{1}{3}$, (c) $\sin x = -\frac{1}{4}$, (d) $\cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, (e) $\cos x = -\frac{3}{4}$.

Podobne zadania (także rozwiązane) można znaleźć w skrypcie:

M. Gewert, Z. Skoczylas, Wstęp do analizy i algebry. Teoria, przykłady, zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2014.

LISTA 2
(na 1 ćwiczenia)

Ciągi liczbowe

2.1. Uzasadnić, że podane ciągi są monotoniczne i ograniczone.

$$(a) a_n = \frac{n}{2n+1}, \quad (b) b_n = \frac{2^n}{3^n+2}, \quad (c) c_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad (d) d_n = \sin \frac{\pi}{2n+1},$$
$$(e) e_n = \frac{(n+2)^2}{2^{n+2}}, \quad (f) f_n = \sqrt{n+8} - \sqrt{n+3}, \quad (g) g_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}.$$

2.2. Korzystając z odpowiedniej definicji granicy ciągu liczbowego, uzasadnić, że

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = 1, \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{2n} = +\infty, \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+4}{n+2} \neq 2.$$

2.3. Uzasadnić, podając odpowiednie przykłady, że poniższe wyrażenia są nieoznaczone

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 1^\infty, \quad \infty^0, \quad 0^0.$$

2.4. Obliczyć granice ciągów liczbowych.

$$(a) a_n = \frac{2n-3}{3n+4}, \quad (b) b_n = \frac{n^2+3n-8}{2n+5}, \quad (c) c_n = \frac{n^2+n-3}{n^3+2n+1},$$
$$(d) d_n = \frac{(2n^3+3)^8}{(2n^4+7)^6}, \quad (e) e_n = \frac{n+\sqrt{n^3+7}}{\sqrt[3]{n^2+5}+4n}, \quad (f) f_n = \frac{8^{n+2}+2^n}{2^{3n+1}+3^n+4},$$
$$(g) g_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}, \quad (h) h_n = \sqrt{n+8} - \sqrt{n+3},$$
$$(i) i_n = \sqrt{n^2+4n+1} - \sqrt{n^2+3}, \quad (j) j_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{n+23},$$
$$(k) k_n = \sqrt{9^n+4 \cdot 3^n+1} - \sqrt{9^n+3}, \quad (l) l_n = n^{30} - 2 \cdot n^{21} - 3 \cdot n^9 + 3,$$
$$(m) m_n = 7^n - 2 \cdot 5^{2n} + 3 \cdot 9^{n+5} + 4, \quad (n) m_n = \left(\frac{n+4}{n+1}\right)^{n+3}, \quad (o) o_n = \left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)^{n^2},$$
$$(p) p_n = \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{1-3n}, \quad (r) r_n = \left(\frac{4n+1}{2n-1}\right)^{n+6}, \quad (s) s_n = \left(\frac{3^n+2^n}{5^n+3^n}\right)^n.$$

2.5. Dla danego ciągu (a_n) dobrać ciąg (b_n) postaci $b_n = n^p$ lub $b_n = \alpha^n$ tak, aby ciągi (a_n) i (b_n) były tego samego rzędu. (Mówimy, że ciągi (a_n) , (b_n) są tego samego rzędu, jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, dla pewnej liczby dodatniej k .)

$$(a) a_n = \frac{1}{n^2+4n+3}, \quad (b) a_n = \frac{n^2}{n^3+7}, \quad (c) a_n = \sqrt{n+9} - \sqrt{n+1},$$
$$(d) a_n = \frac{1}{3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n}, \quad (e) a_n = \frac{3^n}{4n+5n}, \quad (f) a_n = \frac{4^{n+2}}{5 \cdot 2^{n+1} + 2 \cdot 3^n}.$$

Podobne zadania (także rozwiązane) można znaleźć w skrypcie:

M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2017, rozdział 1.

LISTA 3
(na 2 ćwiczenia)

Granice funkcji. Asymptoty. Funkcje ciągłe

3.1. Narysować wykresy funkcji spełniających wszystkie podane warunki

- (a) $f(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pi$;
(b) $g(0) = 4$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -3^-} g(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -3^+} g(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ nie istnieje;
(c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$ nie istnieje, $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) \neq h(0)$, $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = +\infty$, $h(3) < 0$.

3.2. Obliczyć granice

- (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$, (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$, (c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8 - x^3}{x^2 - 4}$, (d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - x^3}{x^2 - 4}$,
(e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 3}{|x^2 - 1|}$, (f) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^x}{x - 1}$, (g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} + x^2}{x + \sqrt{x}}$, (h) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x} + x^2}{x + \sqrt{x}}$,
(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \pi x}{x}$, (j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 3x}$, (k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}{\operatorname{tg} \frac{2}{x}}$, (l) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin 6x}$.

3.3. Uzasadnić, że podane granice funkcji nie istnieją

- (a) $\lim_{x \rightarrow -0,5} \frac{2x - 1}{4x^2 - 1}$, (b) $\lim_{x \rightarrow 0} 2^{1/x}$, (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2^x - 3^x}$, (d) $\lim_{x \rightarrow \pi} \operatorname{sgn}(\sin x)$.

3.4. Korzystając z odpowiednich twierdzeń (o trzech funkcjach, o iloczynie funkcji ograniczonej i funkcji zbieżnej do zera, o dwóch funkcjach) wyznaczyć granice

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cos \frac{1}{x^2}$, (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x^2}{x}$, (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin x^2}{3x + \cos \sqrt{x}}$, (d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 + \sin \frac{1}{x}}{x^3}$.

3.5. Narysować wykresy funkcji spełniających wszystkie podane warunki

- (a) prosta $x = 1$ jest asymptotą pionową obustronną funkcji f , $y = 2$ jest asymptotą poziomą w $-\infty$, $y = -x + 2$ jest asymptotą ukośną w $+\infty$;
(b) prosta $x = -2$ jest asymptotą pionową lewostronną funkcji g i nie jest asymptotą pionową prawostronną, funkcja g nie ma asymptoty w $-\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3$;
(c) prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową obustronną funkcji h , $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ nie istnieje,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x) + 2x] = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) + x - 1] = 0$.

3.6. Wyznaczyć wszystkie asymptoty funkcji f . Naszkicować hipotetyczny wykres.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x) &= \frac{8x^3 + 1}{4x^2 - 1}, & \text{(b)} \quad f(x) &= \frac{x^2 - 6}{x - 1}, & \text{(c)} \quad f(x) &= \frac{3}{2^x - 8}, \\ \text{(d)} \quad f(x) &= \frac{e^x}{e^x - 2}, & \text{(e)} \quad f(x) &= \sqrt{x^2 - 2x}, & \text{(f)} \quad f(x) &= \frac{\cos x}{2\pi - x}. \end{aligned}$$

3.7. Czy można dobrać parametry $a, b \in \mathbf{R}$ tak, aby podana funkcja była ciągła na \mathbf{R} . Wykonać rysunek.

$$\text{(a)} \quad f(x) = \begin{cases} |x + 2| & \text{dla } x < 0 \\ a - x & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}, \quad \text{(b)} \quad f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x & \text{dla } |x| \leq 1 \\ ax^2 + bx & \text{dla } |x| > 1 \end{cases},$$

$$\text{c)} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{dla } x \neq 2 \\ a & \text{dla } x = 2 \end{cases}, \quad \text{d)} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x + 1}{x^2 - 1} & \text{dla } |x| \neq 1 \\ a & \text{dla } x = -1 \\ b & \text{dla } x = 1 \end{cases}.$$

3.8. Uzasadnić, korzystając z twierdzenia Darboux, że równanie ma rozwiązanie we wskazanym przedziale. W przykładach (a), (b), (c) uzasadnić jednoznaczność rozwiązania. Podać graficzną interpretację równania.

$$\text{(a)} \quad \sin x = 2 - 2x, \quad \left(0, \frac{\pi}{2}\right); \quad \text{(b)} \quad e^x = \frac{1}{x^2}, \quad \left(\frac{1}{2}, 1\right);$$

$$\text{(c)} \quad x^2 = -\ln x, \quad (0, +\infty); \quad \text{(d)} \quad 10 \sin(\pi x) = x + 1, \quad \left(-\frac{1}{2}, 1\right).$$

3.9. Uzasadnić, że równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie i wyznaczyć je (nie korzystając z kalkulatora) z błędem nie większym niż 0,25.

$$\text{(a)} \quad x^3 + 6x = 2, \quad \text{(b)} \quad x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0, \quad \text{(c)} \quad x^3 = 4 + 2^{-x}.$$

Podobne zadania (także rozwiązane) można znaleźć w skrypcie:

M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2017, rozdział 2 i 3.

POWTÓRKA 1

P1.1. Naszkicować wykresy funkcji.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} f(x) = \left| \frac{|x|}{2} - 4 \right|, & \text{(b)} f(x) = \frac{x-1}{x-2}, & \text{(c)} f(x) = x^2 - 4|x| + 7, \\ \text{(d)} f(x) = 1 - \sqrt{|x| - 2}, & \text{(e)} f(x) = 2^{-x} - 2, & \text{(f)} f(x) = ||\log_2(x-2)| - 1|, \\ \text{(g)} f(x) = 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}, & \text{(h)} f(x) = \cos \left(|x| + \frac{\pi}{3} \right), & \text{(i)} f(x) = 2 \sin 2x - |\sin 2x|, \\ \text{(j)} f(x) = \frac{|\operatorname{ctg} x|}{\operatorname{ctg} x}, & \text{(k)} f(x) = \pi - \arctg x, & \text{(l)} f(x) = \frac{\pi}{2} + \arcsin x. \end{array}$$

P1.2. Wyznaczyć dziedzinę funkcji.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x}}, & \text{(b)} f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-4}}, & \text{(c)} f(x) = 1 - \ln \sin x, \\ \text{(d)} f(x) = \frac{x-5}{\log_2(x^2-3)}, & \text{(e)} f(x) = \frac{1}{2^{-x}-2}, & \text{(f)} f(x) = \ln^2 \left(6 - \frac{1}{x} \right), \\ \text{(g)} f(x) = 3 \operatorname{ctg} \frac{x}{4}, & \text{(h)} f(x) = \frac{e^x}{\pi^2 - 16 \operatorname{arctg}^2 x}, & \text{(i)} f(x) = \arcsin \ln x. \end{array}$$

P1.3. Rozwiązać równania i nierówności.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} x(x-1) < 2(x+2), & \text{(b)} x^4 - 5x^2 \geq -4, & \text{(c)} \frac{1}{x^3} \leq 8, \\ \text{(d)} |e^{-x} - 3| = 1, & \text{(e)} 2^x - \frac{3}{2^x} > 2, & \text{(f)} \frac{1}{\ln x} < 3, \\ \text{(g)} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \geq 0, & \text{(h)} \cos^2 \frac{x}{5} = 1, & \text{(i)} \operatorname{tg} 3x = 2. \end{array}$$

P1.4. Uzasadnić tożsamość trygonometryczną i podać jej dziedzinę.

$$\text{(a)} \cos x \cdot (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = \frac{1}{\sin x}, \quad \text{(b)} \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}, \quad \text{(c)} \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}.$$

P1.5. Napisać wzory określające funkcje złożone $f \circ g$, $g \circ f$ oraz naszkicować ich wykresy.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} f(x) = x^2 - 4x, & g(x) = |x|, & \text{(b)} f(x) = e^{-x}, & g(x) = 2x + 1, \\ \text{(c)} f(x) = \log_{0,5} x, & g(x) = |x| + 2, & \text{(d)} f(x) = \cos 2x, & g(x) = 0,5x, \\ \text{(e)} f(x) = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right), & g(x) = 2x, & \text{(f)} f(x) = \sqrt{x}, & g(x) = x^2. \end{array}$$

P1.6. Wyprowadzić wzór funkcji odwrotnej do funkcji f . Naszkicować w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = f^{-1}(x)$.

(a) $f(x) = 4 - 2x$, (b) $f(x) = \sqrt{x} + 1$, (c) $f(x) = 1 + 2^x$, (d) $f(x) = 2 \ln(x + 1)$,
 (e) $f(x) = x^2 + 2x$ dla $x \geq -1$, (f) $f(x) = x^2 + 2x$ dla $x \leq -1$.

P1.7. Uzasadnić, że ciąg (a_n) jest monotoniczny (od pewnego miejsca) i ograniczony

(a) $a_n = \frac{n+1}{3n+4}$, (b) $a_n = \frac{2^n + 4^n}{5^n}$, (c) $a_n = \frac{12^n}{(n+1)!}$,
 (d) $a_n = \cos^2 \frac{\pi}{4n+7}$, (e) $a_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n}$, (f) $a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2^n}$.

P1.8. Obliczyć granice ciągów liczbowych:

(a) $a_n = \frac{\sqrt{5n+4}}{4n+\sqrt{5}}$, (b) $a_n = \frac{3^{n+1} + 6 \cdot 2^n}{5 \cdot 4^{n-1} - 3^n}$, (c) $a_n = \frac{1}{\sqrt{4n+3} \cdot 2^n - \sqrt{4n+4}}$,
 (d) $a_n = 7^{3n+4} - 9^{2n+7}$, (e) $a_n = \frac{1+n^2}{1+2+3+\dots+n}$, (f) $a_n = \frac{n\sqrt{n+3} - \sqrt{n^3+9}}{\sqrt{n}}$,
 (g) $a_n = \left(\frac{n^3+2}{n^2+2n}\right)^{3n+1}$, (h) $a_n = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n$, (i) $a_n = \left(\frac{3n+5}{3n+2}\right)^{2-5n}$,
 (j) $a_n = \sqrt{\pi^n} - \sqrt{e^n}$, (k) $a_n = \frac{\arctg(2n+1)}{1+2\arctgn^2}$, (l) $a_n = \ln(4n+5) - \ln(2n+3)$.

P1.9. Naszkicować wykresy funkcji spełniających wszystkie podane warunki

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, f jest funkcją nieparzystą;

(b) prosta $y = 1$ jest asymptotą poziomą w $-\infty$, prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową obustronną,

$\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ nie istnieje, g jest funkcją parzystą;

(c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x) - x + 2] = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$,

h nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$.

P1.10. Obliczyć granice funkcji:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}, \quad \text{(b) } \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}, \quad \text{(c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}, \quad \text{(d) } \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x-5} - 2}{x-9}, \\
 & \text{(e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 2^x}{4 + 2 \cdot 3^x}, \quad \text{(f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x + 2^x}{4 + 2 \cdot 3^x}, \quad \text{(g) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{4^x - 3^x}, \quad \text{(h) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x), \\
 & \text{(i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x + \pi}}, \quad \text{(j) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}, \quad \text{(k) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x - 5 \sin 5x}{x}, \quad \text{(l) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sqrt{1 + 3x} - 1}.
 \end{aligned}$$

P1.11. Zbadać, czy istnieją granice:

$$\text{(a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x)}{|x|}, \quad \text{(b) } \lim_{x \rightarrow 2} e^{\frac{x+2}{x-2}}, \quad \text{(c) } \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \quad \text{(d) } \lim_{x \rightarrow e} \frac{1}{1 - \ln x}.$$

P1.12. Wyznaczyć asymptoty funkcji:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a) } f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}, \quad \text{(b) } f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}, \quad \text{(c) } f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}, \quad \text{(d) } f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}, \\
 & \text{(e) } f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x}, \quad \text{(f) } f(x) = \frac{\ln x}{2 + \ln x}, \quad \text{(g) } f(x) = \frac{3^x}{3^x - 2}, \quad \text{(h) } f(x) = x + \frac{\sin \sqrt{x}}{x}.
 \end{aligned}$$

P1.13. Czy można dobrać parametry $a, b \in \mathbf{R}$ tak, aby funkcja f była ciągła na \mathbf{R} ? Obliczyć odpowiednie granice i narysować wykres funkcji f .

$$\text{(a) } f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dla } x < 1 \\ b & \text{dla } x = 1 \\ x^2 + ax + 1 & \text{dla } x > 1 \end{cases}, \quad \text{(b) } f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{dla } |x| < 1 \\ \operatorname{arctg} x & \text{dla } |x| \geq 1 \end{cases},$$

P1.14. Korzystając z twierdzenia Darboux uzasadnić, że równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie na wskazanym przedziale. Przedstawić graficzną interpretację równania.

$$\begin{aligned}
 & \text{(a) } 4^x = \frac{2}{x}, \quad (0,5, 1); \quad \text{(b) } \ln x = 1 - 2x, \quad (0,5, 1); \\
 & \text{(c) } 3^x = -x^3, \quad (-1, -0,5); \quad \text{(d) } 2^x = 4 - \sqrt{x}, \quad (1, 2).
 \end{aligned}$$

Podobne zadania (także rozwiązane) można znaleźć w skryptach:

M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2014,

M. Gewert, Z. Skoczylas, Wstęp do analizy i algebry. Teoria, przykłady, zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2017.

LISTA 4
(na 3 ćwiczenia)

Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej

4.1. Korzystając z definicji zbadać, czy istnieją pochodne jednostronne oraz pochodna podanej funkcji we wskazanym punkcie. Naszkicować wykres funkcji.

(a) $y(x) = |x^2 - 4|$, $x_0 = 2$; (b) $f(x) = |\sin^3 x|$, $x_0 = 0$;
(c) $g(x) = x^2 \operatorname{sgn} x$, $x_0 = 0$; (d) $h(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{dla } x \leq 1 \\ (x - 2)^2 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$.

4.2. Korzystając z wzoru na pochodną funkcji $f(x) = x^\alpha$ i reguł różniczkowania, obliczyć pochodną funkcji:

(a) $y = \sqrt{2}x^4 + 4\sqrt{x} - x\sqrt{x} + 3x^2\sqrt[3]{x}$, (b) $y = 5 \cdot \frac{1}{x^4} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{x \cdot \sqrt{x}} + \frac{1}{3x \cdot \sqrt[3]{x}}$,
(c) $y = \frac{x}{\sqrt[4]{x^3}} - \frac{5x^2}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{7x^2} + \frac{x^{-2}}{x}$; (d) $y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9x}} - \frac{8}{(2x)^2} + \sqrt[3]{\frac{x}{16}} + \sqrt[4]{2^3}$.

4.3. Korzystając z wzoru na pochodną iloczynu lub ilorazu, obliczyć pochodną funkcji:

(a) $y = e^x \cdot \cos x$, (b) $y = x^2 \cdot \ln x$, (c) $y = x \cdot 2^x \cdot \sin x$, (d) $y = x^2 \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{arctg} x$,
(e) $y = \frac{x^2}{x^2 + x + 2}$, (f) $y = \frac{2^x - 3^x}{x}$, (g) $y = \frac{x \ln x}{2x - 3}$, (h) $y = \frac{x \sin x + \cos x}{\sin x - x \cos x}$.

4.4. Obliczyć pochodną funkcji:

(a) $y = \ln(2x)$, (b) $y = \frac{1}{(2x - 3)^2}$, (c) $y = 3x \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$, (d) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$,
(e) $y = \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$, (f) $y = \sin^2 x$, (g) $y = \cos^3\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$, (h) $y = x^3 \cos^2 \pi x$.

4.5. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$. Sporządzić rysunek.

(a) $f(x) = \sin 2x$, $x_0 = 0$; (b) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $x_0 = 1,5\pi$; (c) $f(x) = \ln(x - 3)$, $f(x_0) = 0$.

4.6. Napisać równanie tej stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$, która ma podaną własność.

(a) $f(x) = x \cdot \ln x$, styczna jest równoległa do prostej $5x + 5y - 1 = 0$;
(b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, styczna jest prostopadła do prostej $2x - y = 0$;
(c) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, styczna jest pozioma;
(d) $f(x) = 3 - x^2$, styczna tworzy kąt $\frac{\pi}{3}$ z dodatnim kierunkiem osi OX .

4.7. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia:

(a) $\frac{1}{\sqrt{4,02}}$, (b) $\frac{\ln 0,99}{1,99}$, (c) $1,03 \cdot \sqrt[3]{8,03}$, (d) $\operatorname{tg}^2 44^\circ$.

4.8. W wyniku pomiaru długości krawędzi czworościanu foremnego otrzymano $1,00 \pm 0,01$ m. Z jakim błędem bezwzględnym i względnym zostaną obliczone: wysokość, pole powierzchni i objętość tego czworościanu?

4.9. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granice:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)}{\ln x}$, (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+2^x)}{3^x}$, (c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x\right)$,
(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \ln x)$, (e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x$, (f) $\lim_{x \rightarrow \pi^-} (\pi - x) \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

4.10. Wyznaczyć wszystkie asymptoty funkcji:

(a) $f(x) = \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^2}$, (b) $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$, (c) $f(x) = \frac{x}{\operatorname{arctg} x}$, (d) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$.

4.11. Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji. Naszkicować ich wykresy.

(a) $y(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2$, (b) $y(x) = \frac{x^2}{x+1}$, (c) $f(x) = x^3 \cdot e^x$, (d) $g(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$.

4.12. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji na wskazanym przedziale:

(a) $f(x) = x - 2\sqrt{x}$, $[0, 5]$, (b) $f(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}$, $[0, 2]$, (c) $f(x) = 2 \sin x + \sin 2x$, $\left[0, \frac{3}{2}\pi\right]$.

4.13.

(a) Wyznaczyć dwie liczby dodatnie, których suma jest równa 20, a iloczyn kwadratu pierwszej i trzeciej potęgi drugiej ma wartość największą.

(b) Zbadać, który z prostopadłościanów o podstawie kwadratowej i danym polu powierzchni całkowitej ma największą objętość.

(c) Firma spedycyjna przyjmuje zlecenie przewozu prostopadłościennych paczek, dla których suma wysokości i obwodu podstawy jest nie większa niż 108 cm. Znaleźć wymiary paczki o kwadratowej podstawie i największej objętości, która może być przesłana za pośrednictwem tej firmy.

(d) Przez punkt $P = (1, 3)$ poprowadzić prostą tak, aby wraz z dodatnimi półosią układu współrzędnych tworzyła trójkąt o najmniejszym polu.

4.14. Wyznaczyć zbiór wartości funkcji:

(a) $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$, (b) $g(x) = (x+1) \cdot e^{-2x}$, (c) $h(x) = x \cdot \ln^2 x$, (d) $h(x) = \sin x - \sin^2 x$.

Podobne zadania (z rozwiązaniami lub odpowiedziami) można znaleźć w skrypcie: M. Gewert, Z. Skoczyła, Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2017, rozdział 4, 5, 6.

LISTA 5.
(na 4 ćwiczzenia)

Całka nieoznaczona i oznaczona

5.1. Korzystając z definicji i wzorów na pochodne podstawowych funkcji odgadnąć funkcje pierwotne F funkcji f :

(a) $f(x) = 2x - 1$, (b) $f(x) = \frac{3}{1+x^2}$, (c) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, (d) $f(x) = e^{-4x}$.

5.2. Obliczyć całki:

(a) $\int \frac{x^4 - x^3 + x - 1}{x - 1} dx$, (b) $\int \left(\frac{x-2}{x}\right)^2 dx$, (c) $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx$,

(d) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx$, (e) $\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx$, (f) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$,

(g) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$, (h) $\int \sin x \cdot \cos x dx$, (i) $\int \left(4 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 6 \cos 3x + 1\right) dx$.

5.3. Obliczyć całki stosując odpowiednie podstawienie

(a) $\int x\sqrt{1+2x^2} dx$, (b) $\int \frac{4x}{\sqrt[3]{x^2-4}} dx$, (c) $\int x^2(x^3-2)^5 dx$, (d) $\int \sin x \cdot \cos^2 x dx$,
(e) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$, (f) $\int xe^{-x^2} dx$, (g) $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$, (h) $\int \frac{1}{4x^2 + 4x + 5} dx$.

5.4. Obliczyć całki, korzystając z tego, że $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$.

(a) $\int \frac{1}{3x+2} dx$, (b) $\int \frac{x}{1+2x^2} dx$, (c) $\int \frac{1}{x \ln x} dx$, (d) $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$.

5.5. Obliczyć całki, stosując wzór na całkowanie przez części

(a) $\int xe^{-3x} dx$, (b) $\int x \cos \frac{x}{2} dx$, (c) $\int x^2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) dx$, (d) $\int \ln(x+1) dx$,

(e) $\int \sqrt{x} \ln x dx$, (f) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$, (g) $\int \operatorname{arcctg} x dx$, (h) $\int e^{-x} \sin 2x dx$.

5.6. Zapisać sumę całkową dla podanej całki oznaczonej. Zastosować równomierny podział przedziału całkowania. Wykorzystać wartość funkcji podcałkowej w prawych końcach podprzedziałów. Korzystając z definicji obliczyć całki z przykładów (a), (b).

(a) $\int_0^1 x^2 dx$, (b) $\int_1^2 x dx$, (c) $\int_0^\pi \sin x dx$, (d) $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$.

5.7. Obliczyć całkę oznaczoną. Podać jej interpretację geometryczną, wykonując odpowiedni rysunek.

$$(a) \int_0^1 (1+x) dx, \quad (b) \int_0^\pi \sin 2x dx, \quad (c) \int_{-1}^1 e^{-x} dx, \quad (d) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{ctg} x dx, \quad (e) \int_{e^{-2}}^{e^2} \ln x dx.$$

5.8. Wyznaczyć średnią wartość funkcji f na przedziale $[a, b]$. Wykonać rysunek.

$$(a) f(x) = \sin^2 x, [a, b] = [0, \pi]; \quad (b) f(x) = |x - 2|, [a, b] = [0, 3].$$

5.9. Obliczyć pole figury ograniczonej podanymi krzywymi. Wykonać rysunek.

$$(a) y = x^2 - 2x + 3, y = x + 3; \quad (b) y = \frac{4}{x^2 + 2}, y = 1;$$

$$(c) y = x^2, y = \frac{x^2}{2}, y = 3x; \quad (d) y = -\ln(x + 2), x = 0, y = 0.$$

5.10. Napisać wzór na długość łuku wykresu funkcji różniczkowalnej i obliczyć długości podanych krzywych. Naszkicować je.

$$(a) y = -x\sqrt{x}, x \in \left[0, \frac{4}{9}\right]; \quad (b) y = \sqrt{4 - x^2}, x \in [-1, 1];$$

$$(c) y = \ln \sin x, x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]; \quad (d) y = \ln x, x \in [1, e].$$

5.11. Napisać wzór na objętość bryły obrotowej powstającej przez obrót wokół osi OX obszaru ograniczonego wykresem ciągłej funkcji nieujemnej $y = f(x)$, osią OX i prostymi $x = a, x = b$. Korzystając z tego wzoru obliczyć objętość:

- (a) kuli o promieniu R ,
- (b) stożka ściętego o promieniach podstaw r, R i wysokości H ,
- (c) bryły powstającej przez obrót wokół osi OX obszaru

$$T = \left\{ (x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq y \leq \operatorname{tg} x \right\},$$

- (d) bryły powstającej przez obrót wokół osi OX obszaru

$$T = \left\{ (x, y) \in R^2 : -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \cos^2 x \right\}.$$

5.12. Obliczyć całki funkcji wymiernych

$$(a) \int \frac{8x^2}{x^2 - 1} dx, \quad (b) \int \frac{3x^2}{x^3 + x^2 - 4x - 4} dx, \quad (c) \int \frac{x^3 - x^2 + 3}{x^4 + 3x^2} dx,$$

$$(d) \int \frac{2}{x^2 + 6x + 18} dx, \quad (e) \int \frac{5 - 4x}{x^2 - 4x + 20} dx, \quad (f) \int \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 2x^2 + 2x} dx.$$

5.13. Obliczyć całki funkcji trygonometrycznych

$$\begin{aligned} \text{(a)} \int \sin^5 x \, dx, & \quad \text{(b)} \int \sin^2 x \cos^3 x \, dx, & \text{(c)} \int \frac{\cos^3 x}{2 - \sin x} \, dx, & \quad \text{(d)} \int \frac{1}{4 + 5 \sin^2 x} \, dx, \\ \text{(e)} \int \frac{1}{5 - 3 \cos x} \, dx, & \text{(e)} \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin 3x \, dx, & \text{(f)} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \cos 4x \, dx, & \quad \text{(g)} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx. \end{aligned}$$

*Podobne zadania (z rozwiązaniami lub odpowiedziami) można znaleźć w skrypcie:
M.Gewert, Z.Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania, Oficyna Wydawnicza GiS,
Wrocław 2017, rozdział 7, 8, 9.*

POWTÓRKA 2

P2.1. Obliczyć pochodne funkcji:

$$(a) f(x) = \frac{\arctg x}{\ln(1+x^2)}, \quad (b) f(x) = e^{3\sin x} \cdot \sin 2x, \quad (c) f(x) = (x \cos x)^2, \quad (d) f(x) = \frac{x \cdot \sqrt[3]{2+x}}{x + \sqrt[3]{2+x}}.$$

P2.2.

(a) Napisać równania stycznych do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{2}\arctg(1-x^2)$ w miejscach zerowych funkcji. Pod jakimi kątami wykres przecina oś OX ?

(b) Napisać równanie tej stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \ln \sqrt{x} - 0,5x^2$, która jest równoległa do osi OX .

(c) Napisać równanie tej stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \ln(x^2 + e^{-x})$, która jest równoległa do prostej $l : y = 5 - x$.

(d) Napisać równanie tej stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{tg}(2x) - 3x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, która jest prostopadła do prostej $l : x + 5y = 0$.

(e) Dla jakich wartości parametrów a, b parabola o równaniu $y = -x^2 + ax + b$ jest styczna w punkcie $(1, 1)$ do prostej $y = x$? Wykonać rysunek.

P2.3. Wykorzystując różniczkę obliczyć, o ile w przybliżeniu zmieni się wartość funkcji

(a) $f(x) = (1+x) \ln x$, gdy jej argument wzrośnie od wartości $x_0 = 1$ do wartości $x_1 = 1,1$;

(b) $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$, gdy jej argument zmieni się od wartości $x_0 = 4$ do wartości $x_1 = 3,99$.

P2.4. Zbadać istnienie asymptoty

(a) o równaniu $x = 0$ funkcji $f(x) = \frac{1 - \cos 3x}{\sin^2 4x}$,

(b) o równaniu $x = \frac{\pi}{2}$ funkcji $f(x) = \frac{\ln(1 + 3 \cos x)}{\pi - 2x}$,

(c) poziomej w $+\infty$ funkcji $f(x) = x \cdot \left(6^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x}}\right)$,

(d) o równaniu $x = 0$ funkcji $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin 2x}$.

P2.5. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji na wskazanym przedziale.

$$(a) f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}, \quad [-7, 0]; \quad (b) y(x) = \frac{e^x}{1+x^2}, \quad [-2, 2];$$

$$(c) g(x) = \sqrt{3} \cos x + \sin x, \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right]; \quad (d) y(x) = \sqrt[3]{(x^2+x)^2}, \quad [-2, 3].$$

P2.6. Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji f . Naszkicować jej wykres.

$$(a) f(x) = \ln(x^3 - 2x^2 + x), \quad (b) f(x) = x \cdot \ln^4 x, \quad (c) f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x - 1}, \quad (d) f(x) = \frac{x}{\ln x}.$$

P2.7. Wyznaczyć zbiór wartości funkcji. Naszkicować jej wykres.

$$(a) y(x) = \frac{(x-1)^2}{(x-3)^2}, \quad (b) f(x) = x \cdot (1 + 2 \ln x), \quad (c) f(x) = x \cdot \sqrt{4x - x^2}, \quad (d) f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}.$$

P2.8.

(a) W obszar ograniczony parabolą $y = 16 - x^2$ i osią OX wpisano prostokąt tak, że jeden z jego boków leży na osi OX . Jakie wymiary ma prostokąt o największym polu?

(b) Metodami rachunku różniczkowego uzasadnić, że prostopadłościan o danej sumie długości krawędzi, kwadratowej podstawie i największej objętości jest sześcianem.

(c) Ile materiału stracimy wycinając z blachy w kształcie półkola o promieniu R prostokąt o największym polu?

P2.9. Obliczyć całki:

$$(a) \int x \cdot \cos(\pi x + 2) dx, \quad (b) \int \left(\frac{x}{e^x}\right)^2 dx, \quad (c) \int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}} dx,$$
$$(d) \int \frac{\sin 3x}{e^x} dx, \quad (e) \int \frac{\operatorname{tg}(\ln x)}{x} dx, \quad (f) \int \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1}}{x^2 + 1} x dx,$$
$$(g) \int \frac{1 + \ln x}{1 + \ln^2 x} \cdot \frac{1}{x} dx, \quad (h) \int (1 + \cos x) \cdot \sin^3 x dx, \quad (i) \int 3^{2x} \cdot \sin 3^x dx.$$

P2.10. Obliczyć całkę oznaczoną. Podać jej interpretację geometryczną. Wykonać rysunek.

$$(a) \int_{-1}^1 e^{2x} dx, \quad (b) \int_0^\pi \sin x \cos x dx, \quad (c) \int_{\frac{1}{e}}^{e^2} \ln x dx, \quad (d) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x dx.$$

P2.11. Obliczyć pole figury ograniczonej podanymi krzywymi. Wykonać rysunek.

$$(a) y = x^2 - 2x, y = x + 4; \quad (b) y = x^2, y = 5 - (x + 1)^2;$$
$$(c) y = \sqrt{x}, y = \sqrt[3]{x}; \quad (d) y = \frac{4}{x^2 + 1}, y = 1;$$
$$(e) x + y = 4, y = \frac{3}{x}; \quad (f) y = \sin x, y = x, x = \pi;$$
$$(g) y = \ln(1 + x), y = x, x = e; \quad (h) y = \ln(1 + x), y = x, y = 1.$$

Podobne zadania (także rozwiązane) można znaleźć w skrypcach:

M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2017,

M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Kolokwia i egzaminy, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2014.