

Rozważamy rzut stereograficzny z bieguna  $N = (0, 0, 1)$  sfery  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  na płaszczyznę równika  $\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ , którą utożsamiamy z  $\mathbb{R}^2$  (lub  $\mathbb{C}$ ). W ten sposób dostajemy odwzorowanie  $T$  ze sfery bez bieguna  $S^2 \setminus N$  na płaszczyznę  $\mathbb{R}^2$ . Uzupełniając  $\mathbb{R}^2$  o dodatkowy „punkt w nieskończoności”  $\infty$  możemy rozszerzyć  $T$  do bijekcji pomiędzy  $S^2$  a  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  (lub  $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ). Dokładniej, dla  $(x, y, z) \in S^2$  przyjmujemy

$$T(x, y, z) = \begin{cases} \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right), & \text{gdy } z \neq 1, \\ \infty, & \text{gdy } z = 1. \end{cases}$$

1. ♡ Uzasadnij, że podany wyżej wzór na  $T$  jest zgodny z interpretacją geometryczną.
2. Sprawdź, że odwzorowanie odwrotne  $T^{-1} : \mathbb{R}^2 \cup \infty \rightarrow S^2$  jest dane wzorem

$$T^{-1}(\infty) = (0, 0, 1), \quad T^{-1}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}(2x, 2y, x^2 + y^2 - 1), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

w szczególności  $T$  istotnie jest bijekcją.

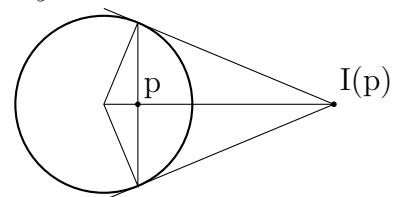
*Okręgiem* w  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  nazywamy każdy okrąg z  $\mathbb{R}^2$ , *prostą* w  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  nazywamy każdą prostą z  $\mathbb{R}^2$  uzupełnioną o punkt  $\infty$ .

*Okręgi* w  $S^2$  określamy standardowo: każdy okrąg w  $S^2$  jest przekrojem  $S^2$  i pewnej płaszczyzny  $Ax + By + Cz + D = 0$ , gdzie  $|D| < \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ .

3. Uzasadnij, że jeśli  $E \subset S^2$  jest okręgiem, to obraz  $T(E)$  jest okręgiem lub prostą w  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ . Ponadto każdy okrąg i każda prosta z  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  jest postaci  $T(E)$  dla pewnego okręgu  $E \subset S^2$ . Wywnioskuj stąd, że  $T^{-1}$  przekształca okręgi i proste w  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  na okręgi w  $S^2$ .
4. (Inwersja względem okręgu jednostkowego) Rozważmy następujące odwzorowanie  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  w siebie

$$I(\infty) = (0, 0), \quad I(0, 0) = \infty, \quad I(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right), \quad \text{dla } (x, y) \neq (0, 0).$$

Sprawdź, że  $I(I(p)) = p$  (skąd  $I$  jest bijekcją  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ );  $\|I(x, y)\| \cdot \|(x, y)\| = 1$  dla  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Uzasadnij poprawność konstrukcji  $I(p)$  przedstawionej na rysunku.



5. Jakiemu odwzorowaniu sfery  $S^2$  odpowiada inwersja z poprzedniego zadania? Dokładniej, chodzi o zidentyfikowanie odwzorowania  $T^{-1} \circ I \circ T : S^2 \rightarrow S^2$ .
6. Wywnioskuj z wyniku poprzedniego zadania, że inwersja (na  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ ) zachowuje rodzinę okręgów i prostych, tzn. przekształca każdy okrąg na okrąg lub prostą i przekształca każdą prostą na okrąg lub prostą.

Na  $S^2$  rozważamy standardową metrykę euklidesową i przenosimy ją za pomocą  $T$  na  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  (lub  $\hat{\mathbb{C}}$ ). Dokładniej, niech

$$d(a, b) := \|T^{-1}(a) - T^{-1}(b)\|, \quad \text{dla } a, b \in \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}.$$

7. Sprawdź, że dla  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  zachodzi

$$d(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{|z_1|^2 + 1}\sqrt{|z_2|^2 + 1}}, \quad d(z_1, \infty) = \frac{2}{\sqrt{|z_1|^2 + 1}}.$$

8. Odwzorowanie  $T$  jest izometrią z  $S^2$  na  $(\hat{\mathbb{C}}, d)$ . Przestrzeń metryczna  $(\hat{\mathbb{C}}, d)$  jest zwarta.

9. Metryka  $d$  obcięta do  $\mathbb{C}$  generuje taką samą topologię jak metryka euklidesowa. Równoważnie, dla każdego ciągu  $z_n \in \mathbb{C}$  zachodzi  $(d(z_n, g) \rightarrow 0 \iff \|z_n - g\| \rightarrow 0)$ . Ponadto  $d(z_n, \infty) \rightarrow 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $|z_n| \rightarrow \infty$ .

---

Homografią nazywamy odwzorowanie  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  postaci  $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ , gdzie  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  oraz  $ad - bc \neq 0$ . Przyjmujemy przy tym, że  $f(\infty) = a/c$  i  $f(-d/c) = \infty$ , gdy  $c \neq 0$ ;  $f(\infty) = \infty$ , gdy  $c = 0$ .

---

10. Każda homografia jest złożeniem odwzorowań postaci  $g(z) = 1/z$  oraz  $h(z) = Az + B$ .

11. Homografie są ciągłe (jako przekształcenia  $(\hat{\mathbb{C}}, d)$ ). Odwzorowanie odwrotne do homografii istnieje i też jest homografią. Zbiór wszystkich homografii jest grupą przekształceń  $\hat{\mathbb{C}}$ .

12. Homografie zachowują rodzinę okręgów i prostych. Wsk. Zadania 6 i 10.

---

13. Wykaż, że funkcje  $\operatorname{Re}, \operatorname{Im}, |\cdot|, z \mapsto \bar{z}$  są ciągłe na  $\mathbb{C}$ .

14. ♡ Załóżmy, że funkcja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  jest ciągła na  $[a, b]$  i różniczkowalna na  $(a, b)$  (co oznacza, że ciągłe i różniczkowalne są funkcje  $\operatorname{Re} f$  oraz  $\operatorname{Im} f$ ;  $f' = (\operatorname{Re} f)' + i(\operatorname{Im} f)'$ ). Udowodnij, że

$$|f(b) - f(a)| \leq |b - a| \sup_{t \in (a, b)} |f'(t)|.$$

(Wsk. wystarczy rozważyć przypadek, gdy  $f(b) - f(a)$  jest rzeczywiste – dlaczego?) Pokaż na przykładzie, że na ogół nie istnieje punkt  $c \in (a, b)$  taki, że  $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ . Porównaj z twierdzeniem Lagrange'a.

15. Znajdź część rzeczywistą, urojoną i moduł liczby  $\frac{1+2i}{3+4i}$ .

16. Zbadaj zbieżność szeregów

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n + 2}{n^2}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})i, \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1 - z^n}, \quad \text{gdzie } |z| < 1.$$

17. Znajdź wszystkie  $z \in \mathbb{C}$ , dla których zbieżny jest szereg

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2i)^n z^n}{n!}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n n^2}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{z+1}{z-1} \right)^n.$$

18. Szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  jest bezwzględnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy szeregi  $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$  oraz  $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$  są bezwzględnie zbieżne.

19. Jeśli  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  jest bezwzględnie zbieżny, to  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n^2$  jest też bezwzględnie zbieżny.

20. Jeśli  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n^2$  jest bezwzględnie zbieżny, to  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{n}$  jest też bezwzględnie zbieżny.