

21. Zbadaj zbieżność ciągów

$$a_n = \frac{2^n}{n^2} + \frac{i \cos n\pi}{n^3}, \quad b_n = z^n, \quad c_n = \frac{in + n^2}{n^2 - i}.$$

Wsk. $|b_{n+1} - b_n| = \dots$

22. Oblicz sumy szeregów (a) $\sum_{n=1}^{\infty} z^{2n}$, (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{(1+2i)^{2n}}$.

23. Jeśli istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, to jest ona równa promieniowi zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-p)^n$.

24. Znajdź promienie zbieżności szeregów potęgowych

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} n z^n, \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} 3^n (z-2)^n, \quad (d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n!}, \quad (e) \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n,$$

$$(f) \sum_{n=0}^8 n! z^n, \quad (g) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2n}, \quad (h) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n \ln^2 n}, \quad (i) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{\ln n}.$$

25. Zbadaj zachowanie szeregów z zadania 24(a), (b), (g), (h), (i) na brzegach ich kół zbieżności.

26. Rozwiń w szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-p)^n$ funkcję f , gdzie

$$(a) f(z) = \frac{1}{1-iz} \text{ oraz } p=0, \quad (b) f(z) = \frac{1}{1-z} \text{ oraz } p=i, \quad (c) f(z) = \frac{1}{1-z} \text{ oraz } p=2.$$

Jakie są promienie zbieżności otrzymanych szeregów?

27. Uzasadnij, że szereg potęgowy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n^3}$ jest zbieżny jednostajnie na $\overline{D(0,1)}$.

28. Stosując twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej, oblicz granice

$$(a) \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + ik};$$

$$(b) \lim_{w \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z+w)^n \text{ dla } z \in D(0,r), \text{ przy założeniu, że szereg } \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ jest zbieżny na } D(0,r).$$

29. Znajdź naturalne dziedziny i pochodne funkcji (a) $f(z) = \frac{z^5}{z^3+1}$, (b) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n}$.

30. Sprawdź, czy funkcja $f(z) = \bar{z}$ spełnia równania Cauchy-Riemanna.

31. Oblicz pochodne (wszędzie tam gdzie istnieją) funkcji: (a) $f(z) = \bar{z}^2 - z$, (b) $f(z) = |z|^2$, (c) $f(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$, gdzie $a \in \mathbb{C}$.

32. Jeśli $f \in C^2(\Omega)$ (jako funkcja dwóch zmiennych rzeczywistych) oraz $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, to $\Delta f = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z}$.

33. Funkcję f nazywamy harmoniczną na zbiorze Ω , jeśli $\Delta f = 0$ na Ω . Wykaż, że funkcja holomorficzna na Ω , a także jej części rzeczywista i urojona są harmoniczne na Ω .

Przypomnienie: Niech X, Y będą przestrzeniami metrycznymi. Zbiór $A \subset X$ nazywamy *spójnym*, jeśli dla dowolnych rozłącznych zbiorów otwartych $G_1, G_2 \subset X$ takich, że $A \subset G_1 \cup G_2$ zachodzi $A \cap G_1 = \emptyset$ lub $A \cap G_2 = \emptyset$. Funkcja $f : X \rightarrow Y$ jest ciągła, jeśli dla dowolnego zbioru otwartego $G \subset Y$ zbiór $f^{-1}(G) := \{x \in X : f(x) \in G\}$ jest otwarty w X .

33. Obraz zbioru spójnego przez funkcję ciągłą jest zbiorem spójnym.
34. ♡ Zbiór otwarty $G \subset \mathbb{C}$ jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy każde dwa punkty tego zbioru można połączyć łamaną zawartą w G . *Wsk. Niech $x_0 \in G$ i niech E będzie zbiorem punktów G , które można połączyć z punktem x_0 łamaną zawartą w G . Pokazać, że E oraz $G \setminus E$ są otwarte.*

35. Jeśli $F \in H(\Omega)$ i $f = F' \in C(\Omega)$, a γ jest drogą w Ω o początku w a i końcu w b , to

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(b) - F(a).$$

36. Niech γ będzie odcinkiem o początku w punkcie 1 i końcu w punkcie $3 + i$. Oblicz całkę

$$\int_{\gamma} z^2 dz$$

z definicji oraz z zadania 35

37. Jeśli $f \in H(\Omega)$ i $f' = 0$ na Ω , to f jest stała na każdej składowej spójności zbioru Ω .
38. Jeśli $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ jest drogą, a f zespoloną funkcją ciągłą na γ^* , przy czym $M = \sup_{\gamma^*} |f|$, to

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \ell(\gamma), \quad \text{gdzie } \ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

39. Sformułuj i udowodnij wzór na całkowanie przez części dla całki wzdłuż drogi.
40. (Funkcje holomorfe o niezerowej pochodnej zachowują kąty) Niech $\gamma_1, \gamma_2 : [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$ będą drogami klasy C^1 , niech $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ dla pewnego $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Uzasadnij, że jeśli $f \in H(\Omega)$ ma niezerową pochodną na Ω , to $f \circ \gamma_k$ są drogami w Ω . Ponadto jeśli $\gamma_1'(t_0) \neq 0$ i $\gamma_2'(t_0) \neq 0$, to kąt pomiędzy drogami γ_1^* i γ_2^* w punkcie $\gamma_1(t_0)$ jest taki sam, jak pomiędzy drogami $(f \circ \gamma_1)^*$ i $(f \circ \gamma_2)^*$ w punkcie $f \circ \gamma_1(t_0)$. *Wskazówka.* Znaleźć wektory styczne do tych dróg.