

Funkcję *wykładniczą* \exp określamy następująco

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Definicja ta jest poprawna, tj. powyższy szereg potęgowy jest zbieżny na \mathbb{C} . Następnie definiujemy funkcje *trygonometryczne* wzorami

$$\sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}, \quad \cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Na wykładzie udowodnimy, że $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$ dla dowolnych $z, w \in \mathbb{C}$. Następne zadania należy rozwiązać korzystając (tylko) z tego wzoru, z definicji funkcji \exp , \cos , \sin i poprzednich zadań.

41. Zauważ, że funkcje \exp , \sin i \cos są holomorficzne na \mathbb{C} i oblicz ich pochodne.
42. ♡ Obcięcie funkcji \exp do \mathbb{R} jest funkcją dodatnią i ściśle rosnącą.
43. ♡ Korzystając ze wzoru $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$ wyprowadź wzór na $\cos(z+w)$ oraz $\sin(z+w)$. Uzasadnij, że $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.
44. ♡ Uzasadnij, że obcięcia funkcji \sin i \cos do \mathbb{R} są funkcjami o wartościach rzeczywistych. Sprawdź, że $\cos 0 = 1$, $\cos 2 < 0$ i wywnioskuj stąd, że istnieje najmniejsza liczba dodatnia t_0 , dla której $\cos t_0 = 0$. **Definicja:** $\pi = 2t_0$.
45. ♡ Uzasadnij, że funkcje \sin i \cos są monotoniczne i dodatnie na $(0, \pi/2)$. Oblicz ich wartości w punktach $0, \pi/2, \pi, 2\pi$. Uzasadnij, że funkcje \sin i \cos są 2π -okresowe, a funkcja \exp jest $2\pi i$ -okresowa.
46. Odwzorowanie $t \mapsto \exp(it)$ przekształca \mathbb{R} na okrąg jednostkowy $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
47. $\exp(z) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z/(2\pi i) \in \mathbb{Z}$.
48. Dla dowolnej liczby $z \in \mathbb{C}$ mamy $\exp(z) \neq 0$. Jeśli $w \in \mathbb{C}$ i $w \neq 0$, to $w = \exp(z)$ dla pewnej liczby $z \in \mathbb{C}$.
49. (Postać trygonometryczna liczb zespolonych) Dla dowolnej liczby zespolonej $z \in \mathbb{C}$ istnieje liczba $t \in [0, 2\pi)$ taka, że

$$z = |z| \exp(it) = |z|(\cos t + i \sin t).$$

Dla liczb $z \neq 0$ liczba t jest wyznaczona jednoznacznie, nazywamy ją *argumentem głównym* liczby z i oznaczamy $t = \text{Arg } z$.

50. Oblicz $\cos i$, $\sin i$, $\cos(i + \pi/2)$; ♡ oblicz wartości funkcji \sin i \cos w punktach $\pi/6, \pi/3, \pi/4$.

51. Sprawdź bezpośrednio, że funkcje \exp oraz \sin spełniają równania Cauchy-Riemanna.
52. Oblicz pochodne funkcji (a) $f(z) = \exp(\frac{1}{\sin z})$; (b) $g(z) = \sin^3(2z) \exp(iz)$.