Funkcje analityczne — Lista 7

89. Rozwiń funkcję f w szereg Laurenta w podanym pierścieniu.

    (a) $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$ na $A(-1,0,2)$, na $A(-1,2,\infty)$ oraz na $A(0,1,\infty)$;

    (b) $f(z) = (z^2+1)e^{1/z}$ na $A(0,0,\infty)$; (c) $f(z) = \frac{\sin(z^2)-z^2}{z^8}$ na $A(0,0,\infty)$.

90. Rozwijając funkcję $f(z) = \exp(z+z^{-1}) = e^z e^{1/z}$ w szereg Laurenta na $A(0,0,\infty)$ uzasadnij, że $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{2\cos t}\cos(nt)\,dt = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!(n+k)!}$, dla $n = 0,1,2,\ldots$.

91. Załóżmy, że $f(z) = \sum_{n=-\infty}^\infty a_n(z-p)^n$ dla $z \in A(p,0,r) = D'(p,r)$, gdzie $r > 0$ (czyli f ma w p osobliwość izolowaną). Znajdź warunek na współczynniki a_n konieczny i dostateczny do tego, by funkcja f miała w punkcie p: (i) osobliwość pozorną; (ii) biegun rzędu $m > 0$; (iii) osobliwość istotną. W przypadku (ii), ile wynosi $\mathrm{res}(f;p)$? Uzasadnij odpowiedzi.

Na wykładzie udowodnimy, że

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)} = \left(z e^{\gamma z} \prod_{k=1}^\infty (1+\frac{z}{k}) e^{-z/k} \right)^{-1}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0,-1,\ldots\}, \tag{1}$$

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

We wzorze (1) liczba γ jest stałą Eulera, $\gamma := \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n) = 0{,}577\ldots$.

---

92. Korzystając z (1) oraz (2) uzasadnij, że

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \qquad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

93. Korzystając z (2), wyraź za pomocą funkcji elementarnych

$$\text{(a)} \prod_{n=1}^\infty (1 + \frac{z^2}{n^2}), \quad \text{(b)} \prod_{n=1}^\infty (1 + \frac{z^4}{n^4}), \quad \text{(c)} \prod_{n=1}^\infty (1 + \frac{z^2}{n^2} + \frac{z^4}{n^4}).$$

94. Uzasadnij, że

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2+z^2} = \frac{\pi\cosh(\pi z)}{2z\sinh(\pi z)} - \frac{1}{2z^2}.$$

    Dla jakich z zachodzi ta równość?

95. Napisz ogólną postać funkcji całkowitych (używając iloczynu nieskończonego i czynników Weierstrassa), która mają jednokrotne zera (tylko) w punktach

    (a) 1, 3, 5, 7, …;

    (b) $\ln 1$, $\ln\frac{1}{2}$, $\ln\frac{1}{3}$, $\ln\frac{1}{4}$, …;

    (c) $\exp(1)$, $\exp(\frac{1}{2})$, $\exp(\frac{1}{3})$, $\exp(\frac{1}{4})$, ….