1 Liczby zespolone (przypomnienie)

Rozważamy $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ z działaniami

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Jest to *ciało*; elementami neutralnymi są: $0 = (0, 0)$ (dla dodawania) oraz $1 = (1, 0)$ (dla mnożenia). Oznaczamy to ciało przez $\mathbb{C}$.

Oznaczenia, własności

- $i = (0, 1)$, mamy $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$ i wtedy $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1) =: x + yi$.

- Dla $z = x + yi$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$ określamy

  $$\overline{z} = x - yi, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{Re} z = x, \quad \operatorname{Im} z = y.$$

  Mamy

  $$z\overline{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - xiy + iyx - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2,$$

  $$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|^2} + i\frac{-\operatorname{Im} z}{|z|^2}.$$

- Dla $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ piszemy, jak zwykle

  $$z^0 = 1, \quad z^{n+1} = z^n \cdot z, \quad z^{-n} = (z^{-1})^n.$$

2 Metryka na $\mathbb{C}$ (przypomnienie)

Twierdzenie **1.** *Dla $z, w \in \mathbb{C}$ i $\alpha > 0$ mamy*

$$|z + w| \leq |z| + |w|, \quad |\alpha z| = \alpha|z|, \quad |z| = 0 \implies z = 0.$$

Innymi słowy, $|\cdot|$ jest normą *na $\mathbb{C}$, a $d(z, w) = |z - w|$ –* metryką.

Dowód. Łatwy (zob. wykład/ćwiczenia z algebry). □

Uwaga **2.** *Jeśli $z_k = x_k + y_ki$, gdzie $x_k, y_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2$, to*

$$d(z_1, z_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

czyli d jest metryką euklidesową na $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Przypomnimy (z kursu z topologii) szereg własności i pojęć dotyczących przestrzeni metrycznej $(\mathbb{C}, d)$ (w skrócie $\mathbb{C}$), a przy okazji ustalimy pewne oznaczenia.

- Mówimy, że ciąg (z_n) zbiega do $g \in \mathbb{C}$, jeśli

  $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ |z_n - g| < \varepsilon.$$

- Mówimy, że ciąg (z_n) jest ciągiem Cauchy'ego (w $\mathbb{C}$), jeśli

  $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall m, n \geq n_0 \ |z_m - z_n| < \varepsilon.$$

- Fakt: $\mathbb{C}$ jest przestrzenią metryczną zupełną, tzn. każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny.
- (ciąg (z_n) zbiega do $g \in \mathbb{C}$) $\iff$ ($\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} g$ oraz $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} g$).
- Jeśli $\lim z_n = z$, $\lim w_n = w$ i $\alpha \in \mathbb{C}$, to $\lim(z_n + w_n) = z + w$, $\lim(\alpha z_n) = \alpha z$, $\lim(z_n w_n) = zw$.
- *Dyskiem* o środku w $z_0 \in \mathbb{C}$ i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór
$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$
- Wnętrze zbioru $E \subset \mathbb{C}$
$$\operatorname{Int} E = \{z \in \mathbb{C} : \exists \rho > 0 \ \ D(z, \rho) \subset E\}.$$
Mówimy, że zbiór E jest *otwarty*, gdy $E = \operatorname{Int} E$. Wnętrze zbioru E jest największym zbiorem otwartym zawartym w E.
- Domknięcie zbioru $E \subset \mathbb{C}$
$$\overline{E} = \mathbb{C} \setminus \operatorname{Int}(\mathbb{C} \setminus E).$$
Mówimy, że zbiór E jest *domknięty*, gdy $E = \overline{E}$, albo równoważnie, gdy $\mathbb{C} \setminus E$ jest otwarty. Domknięcie zbioru E jest najmniejszym zbiorem domkniętym zawierającym E.
- Brzeg zbioru $E \subset \mathbb{C}$
$$\partial E = \overline{E} \cap \overline{\mathbb{C} \setminus E}.$$

3 Funkcje zespolone, ciągłość (przypomnienie)

W tym rozdziale niech $E \subset \mathbb{C}$ i $f : E \to \mathbb{C}$.

DEFINICJA **3.** *Mówimy, że $z_0 \in \mathbb{C}$ jest* punktem skupienia *zbioru E, jeśli $z_0 \in \overline{E \setminus \{z_0\}}$. Jeśli z_0 nie jest punktem skupienia E, ale $z_0 \in E$, to z_0 nazywamy* punktem izolowanym *zbioru E.*

PRZYKŁAD **4.** *0 jest jedynym punktem skupienia zbioru $E = \{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$, a $1, 1/2, 1/3, \ldots$ są punktami izolowanymi E.*

DEFINICJA **5.** *Jeśli $z_0 \in \mathbb{C}$ jest punktem skupienia E, to mówimy, że $f : E \to \mathbb{C}$ ma* granicę *g w punkcie z_0 (ozn. $g = \lim_{z \to z_0} f(z)$), jeśli*
$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall z \in E \ \ (0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - g| < \varepsilon).$$

FAKT **6.** *($g = \lim_{z \to z_0} f(z)$) $\iff$ (dla każdego ciągu (z_n), $z_n \in E \setminus \{z_0\}$, zbieżnego do z_0 mamy $\lim_{n \to \infty} f(z_n) = g$).*

DEFINICJA **7.** *Mówimy, że $f : E \to \mathbb{C}$ jest* ciągła *w punkcie $z_0 \in E$, jeśli*
$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall z \in E \ \ (|z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon).$$

FAKT **8.** *Funkcja $f : E \to \mathbb{C}$ jest ciągła w punkcie $z_0 \in E$ wtedy i tylko wtedy, gdy z_0 jest puktem izolowanym E, lub gdy z_0 jest punktem skupienia zbioru E oraz*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Oznaczenie: $C(E) = \{f \colon E \to \mathbb{C} : f \text{ jest funkcją ciągłą}\}$.

TWIERDZENIE **9.** *(a) Jeśli $f, g \in C(E)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, to funkcje $f+g$, fg, αf są ciągłe.*

(b) Jeśli $f : E_1 \to E_2$, $g : E_2 \to \mathbb{C}$ są ciągłe, to $g \circ f \in C(E_1)$.

(c) Jeśli $f \in C(E)$ i $f \neq 0$ na E, to funkcja $1/f \in C(E)$.

PRZYKŁAD **10.**

- *Funkcje* Re, Im, $|\cdot|$, $z \mapsto \overline{z}$ *są ciągłe na $\mathbb{C}$ (dowód na ćwiczeniach).*

- *Funkcje stałe oraz $f(z) = z$ są ciągłe na $\mathbb{C}$. Stąd z części (a) i (b) twierdzenia 9 otrzymujemy, że każdy wielomian*

$$P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

jest ciągły na $\mathbb{C}$, a każda funkcja wymierna

$$f(z) = P(z)/Q(z), \quad \text{gdzie } P, Q \text{ są wielomianami},$$

jest ciągła na swojej dziedzinie, czyli na $\{z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0\}$.

4 Szeregi zespolone (przypomnienie)

DEFINICJA **11.** *Niech (a_k) będzie ciągiem liczb zespolonych. Mówimy, że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest* zbieżny, *jeśli ciąg sum częściowych $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ jest zbieżny. W takiej sytuacji granicę $lim_{n\to\infty} s_n$ nazywamy* sumą szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *i oznaczamy $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = lim_{n\to\infty} s_n$.*

Szereg, który nie jest zbieżny nazywamy rozbieżnym.

Mówimy, że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest bezwzględnie zbieżny, *jeśli szereg $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ jest zbieżny.*

Przypomnijmy twierdzenia znane z analizy.

TWIERDZENIE **12.**

- *Jeśli szeregi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ są zbieżne, to zbieżny jest też szereg $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ oraz $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$*

- *Jeśli szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest zbieżny i $\alpha \in \mathbb{C}$, to zbieżny jest też szereg $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k)$ oraz $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k$*

- *(Warunek konieczny zbieżności) Jeśli szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest zbieżny, to* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

- *Szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny.*

- *(Kryterium porównawcze) Jeśli $|a_k| \leq b_k$ i szereg $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest bezwzględnie zbieżny.*

- *(Kryterium d'Alemberta) Jeśli*

$$\limsup_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1,$$

to szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *jest bezwzględnie zbieżny. Jeśli natomiast*

$$\liminf_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1,$$

to szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *jest rozbieżny (nie spełnia warunku koniecznego zbieżności).*

- *(Kryterium Cauchy'ego) Jeśli*

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1,$$

to szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *jest bezwzględnie zbieżny. Jeśli natomiast*

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1,$$

to szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *jest rozbieżny (nie spełnia warunku koniecznego zbieżności).*

- *(Kryterium Dirichleta) Jeśli* (a_k) *jest ciągiem malejącym (czyli w szczególności ma wyrazy rzeczywiste) zbieżnym do zera, a ciąg zespolony* (b_k) *jest taki, że* $(\sum_{k=1}^{n} b_k)$ *jest ograniczony, to szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *jest zbieżny.*

Dowód. Dla przykładu podamy dowód części kryterium d'Alemberta oraz kryterium Dirichleta.

- Niech $q = \limsup_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$. Wybierzmy liczbę $r \in (q, 1)$. Z definicji granicy górnej dla $\varepsilon = r - q$ otrzymujemy, że istnieje k_0 takie, że

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \le r, \qquad \text{dla } k \ge k_0.$$

Stąd $|a_{k_0+1}| \le |a_{k_0}|r$, $|a_{k_0+2}| \le |a_{k_0+1}|r \le |a_{k_0}|r^2$, $\ldots$. Przez łatwą indukcję otrzymujemy nierówności

$$|a_{k_0+n}| \le |a_{k_0}|r^n, \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Ponieważ $r \in (0, 1)$, więc szereg geometryczny $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ jest zbieżny. Stąd z krytertium porównawczego zbieżny jest szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{k_0+n}|,$$

czyli też szereg $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

- Niech $R_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k$, $S_n = \sum_{k=1}^n b_k$, $\varepsilon > 0$. Z założenia istnieje M takie, że $|S_n| \leq M$. Pokażemy, że ciąg (R_n) jest ciągiem Cauchy'ego. Mamy

$$\begin{aligned} |R_{n+m} - R_n| &= |\sum_{k=1}^{m} a_{n+k}(S_{n+k} - S_{n+k-1})| = \\ &= |\sum_{k=1}^{m} a_{n+k}S_{n+k} - \sum_{k=0}^{m-1} a_{n+k+1}S_{n+k}| \\ &= |\sum_{k=1}^{m-1}(a_{n+k} - a_{n+k+1})S_{n+k} + a_{n+m}S_{n+m} - a_{n+1}S_n| \\ &\leq \sum_{k=1}^{m-1} |(a_{n+k} - a_{n+k+1})S_{n+k}| + |a_{n+m}S_{n+m}| + |a_{n+1}S_n| \\ &\leq M(a_{n+m} + a_{n+1} + \sum_{k=1}^{m-1}(a_{n+k} - a_{n+k+1})) \\ &= 2Ma_{n+1} < \varepsilon \end{aligned}$$

dla dostatecznie dużych n.

□

5 Ciągi i szeregi funkcyjne (przypomnienie)

DEFINICJA **13.** *Niech $E \subset \mathbb{C}$ i $f_n : E \to \mathbb{C}$.*

- *Mówimy, że ciąg funkcyjny (f_n) zbiega punktowo do funkcji f na zbiorze E, jeśli dla każdego $z \in E$ mamy*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z).$$

Piszemy wówczas $f_n \to f$ na E.

- *Mówimy, że ciąg funkcyjny (f_n) zbiega jednostajnie do funkcji f na zbiorze E, jeśli*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in E} |f_n(z) - f(z)| = 0.$$

Piszemy wówczas $f_n \rightrightarrows f$ na E.

- *Mówimy, że szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^\infty f_n$ zbiega punktowo (jednostajnie) do funkcji f na zbiorze E, jeżeli ciąg funkcyjny $s_n = \sum_{k=1}^n f_k$ zbiega punktowo (odpowiednio, jednostajnie) do funkcji f na E.*

TWIERDZENIE **14.** *(Kryterium Weierstrassa) Jeżeli dla wszystkich $z \in E$ oraz $n \in N$ zachodzi*

$$|f_n(z)| \leq a_n$$

i szereg liczbowy $\sum_{n=1}^\infty a_n$ jest zbieżny, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^\infty f_n$ jest zbieżny jednostajnie na zbiorze E.

TWIERDZENIE **15.** *Jeśli $f_n : E \to \mathbb{C}$ jest ciągiem funkcji ciągłych zbieżnym jednostajnie do funkcji f na E, to f też jest funkcją ciągłą.*

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i $z_0 \in E$. Istnieje n_0 takie, że dla $n \geq n_0$ mamy

$$\sup_{z \in E} |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon/4.$$

Z ciągłości funkcji f_{n_0} w punkcie z_0 istnieje $\delta > 0$ taka, że $|f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)| < \varepsilon/2$ dla $|z - z_0| < \delta$. Mamy dla $|z - z_0| < \delta$

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq |f(z) - f_{n_0}(z)| + |f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)| + |f_{n_0}(z_0) - f(z_0)| \\ &< \varepsilon/4 + \varepsilon/2 + \varepsilon/4 = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

6 Szeregi potęgowe (przypomnienie)

Szeregiem potęgowym nazywamy szereg funkcyjny postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n.$$

Definicja **16.** Promieniem zbieżności *szeregu potęgowego* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n$ *nazywamy wartość*

$$R = \sup\{r \in [0, \infty) : \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n \textit{ jest zbieżny dla } |z-p| \leq r\}.$$

Twierdzenie **17.** *Niech* $\lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. *Wówczas*

- $R = \frac{1}{\lambda}$, *gdy* $0 < \lambda < \infty$;
- $R = 0$, *gdy* $\lambda = \infty$;
- $R = \infty$, *gdy* $\lambda = 0$

jest promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n$. *Szereg ten jest rozbieżny, gdy* $|z-p| > R$.

Dowód. Przy ustalonym z zastosujmy kryterium Cauchy'ego do szeregu (liczbowego) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n$. Mamy

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z-p)^n|} = \limsup_{n\to\infty} (\sqrt[n]{|a_n|}|z-p|) = \lambda|z-p|,$$

więc szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n$ jest zbieżny, gdy $\lambda|z-p| < 1$ i rozbieżny, gdy $\lambda|z-p| > 1$. Stąd teza. □

7 Pochodna zespolona

Definicja **18.** *Niech* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *i niech* $z_0 \in \operatorname{Int} \Omega$. *Mówimy, że* f *ma* pochodną *(zespoloną) w punkcie* z_0, *jeśli istnieje granica*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Granicę tę oznaczamy przez $f'(z_0)$ *i nazywamy* pochodną zespoloną *lub krócej* pochodną *funkcji* f *w punkcie* z_0.

Uwaga **19.** *W powyższej granicy z zbiegają do z_0 po $z \in \Omega$ – rysunek...*

Przykład **20.** • *Gdy $f(z) = z^n$ dla $n \in \mathbb{N}$, to*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z^{n-1} + z^{n-1} z_0 + \ldots + z_0^n)(z - z_0)}{z - z_0} = n z_0^{n-1}.$$

• *Gdy $f(z) = 1/z$, to dla $z_0 \neq 0$ mamy*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1/z - 1/z_0}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z_0 - z}{(z - z_0) z z_0} = -\frac{1}{z_0^2}.$$

• *Gdy $f(z) = \overline{z}$, to*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0}$$

Pokażemy, że ta granica nie istnieje. Istotnie, dla ciągu $z_n = z_0 + 1/n \to z_0$ mamy

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\overline{z_0 + 1/n} - \overline{z_0}}{(z_0 + 1/n) - z_0} = 1,$$

a dla $w_n = z_0 + i/n \to z_0$ mamy

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\overline{z_0 + i/n} - \overline{z_0}}{(z_0 + i/n) - z_0} = \lim_{n \to \infty} \frac{-i/n}{i/n} = -1 \neq 1.$$

Definicja **21.** *Jeśli $\Omega \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem otwartym i $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ ma pochodną (zespoloną) w każdym punkcie dziedziny, to f nazywamy funkcją* holomorficzną *na Ω. Zbiór wszystkich funkcji holomorficznych na Ω oznaczamy przez $H(\Omega)$.*

Uwaga **22.** *(Przeformułowanie definicji) (f ma pochodną w punkcie $z_0 \in \Omega$) $\iff$ (istnieją $A \in \mathbb{C}$, $D(z_0, r) \subset \Omega$ i funkcja $\varepsilon\colon D(z_0, r) \to \mathbb{C}$ takie, że*

$$f(z) - f(z_0) = (A + \varepsilon(z))(z - z_0) \quad \text{dla } z \in D(z_0, r),$$

oraz $\lim_{z \to z_0} \varepsilon(z) = 0$).

Oczywiście wówczas $A = f'(z_0)$.

Wniosek **23.** *Jeśli f ma pochodną w z_0, to jest ciągła w z_0.*

Twierdzenie **24.** *Jeśli funkcje $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ mają pochodne w punkcie $z_0 \in \Omega$, to również funkcje $f + g$, fg, αf ($\alpha \in \mathbb{C}$) mają pochodne w z_0 oraz*

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0), \quad (fg)'(z_0) = f'(z_0) g(z_0) + f(z_0) g'(z_0), \quad (\alpha f)'(z_0) = \alpha f'(z_0).$$

Dowód. Jak dla funkcji rzeczywistych. □

Twierdzenie **25.** *Jeśli f ma pochodną w z_0, a g ma pochodną w $w_0 = f(z_0)$, to złożenie $g \circ f$ ma pochodną w z_0 oraz $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) f'(z_0)$.*

Dowód. Z założenia

$$f(z) - f(z_0) = (f'(z_0) + \varepsilon(z))(z - z_0),$$
$$g(w) - g(w_0) = (g'(w_0) + \eta(w))(w - w_0),$$

gdzie $\lim_{z \to z_0} \varepsilon(z) = 0$, $\lim_{w \to w_0} \eta(w) = 0$. Kładąc $h = g \circ f$, $w = f(z)$ otrzymujemy

$$\frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = \frac{g(w) - g(w_0)}{z - z_0} = (g'(w_0) + \eta(w)) \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \to g'(w_0) f'(z_0)$$

przy $z \to z_0$, bo z ciągłości f wynika, że $w \to w_0$. □

Wniosek **26.** *Jeśli $f \in H(\Omega)$ i $f \neq 0$ na Ω, to $\frac{1}{f} \in H(\Omega)$ i*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z) = \frac{-f'(z)}{f^2(z)}.$$

Dowód. Wystarczy wziąć w poprzednim twierdzeniu $g(z) = 1/z$. □

Twierdzenie **27.** *Jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-p)^n$ jest zbieżny w dysku $D(p,r)$, to jego suma $f(z)$ jest funkcją holomorficzną w dysku $D(p,r)$ oraz $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-p)^{n-1}$*

Dowód. Zauważmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-p)^{n-1}$ ma taki sam promień zbieżności co szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-p)^n$.

Można założyć, że $p = 0$. Niech $\delta < r$. Wówczas dla $w, z \in D(0,\delta)$ mamy

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n w^{n-1} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n}{z-w} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n w^{n-1} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{z^n - w^n}{z-w} - nw^{n-1}\right).$$

Niech $f_n(z) = a_n(z^{n-1} + z^{n-2}w + \ldots + zw^{n-2} + w^{n-1} - nw^{n-1})$. Mamy

$$|f_n(z)| = |a_n| \cdot |z^{n-1} + z^{n-2}w + \ldots + zw^{n-2} + w^{n-1} - nw^{n-1}| \leq |a_n| 2n\delta^{n-1}.$$

Ponieważ szereg potęgowy jest zbieżny bezwzględnie wewnątrz koła zbieżności, więc szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| 2n\delta^{n-1}$ jest zbieżny. Zatem na mocy kryterium Weierstrassa szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ jest zbieżny jednostajnie na $D(0,\delta)$. Ponieważ f_n są ciągłe, więc też suma $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ jest funkcją ciągłą na $D(0,\delta)$, skąd

$$\lim_{z\to w} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(w) = 0, \tag{1}$$

bo $f_n(w) = 0$. Zatem

$$\lim_{z\to w} \left(\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n w^{n-1}\right) = 0.$$

□

Uwaga **28.** *Do uzasadnienia zamiany sumy i granicy w (1) można również użyć tw. Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej (przypomnienie...). Rzeczywiście, dla $z \in D(0,\delta)$ zachodzi*

$$|f_n(z)| \leq |a_n| 2n\delta^{n-1}$$

oraz $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| 2n\delta^{n-1} < \infty$, wobec tego funkcja (ciąg) $|a_n| 2n\delta^{n-1}$ jest majorantą $f_n(z)$, która(y) jest całkowalna(y) po n względem miary liczącej na $\mathbb{N}$. Granicę bierzemy po $z \to w$, co nie jest przeszkodą w stosowaniu tw. Lebesgue'a ze względu na definicję Heinego granicy, która pozwala sprowadzić rozważania do przypadku ciągów $z_k \to w$.

Wniosek **29.**
- *Jeśli dla każdego $p \in \Omega$ istnieją $r > 0$ oraz szereg potęgowy zbieżny do f w $D(p,r)$, to $f \in H(\Omega)$.*

- *Jeśli* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-p)^n$ *w dysku* $D(p,r)$*, to* f *ma wszystkie pochodne w* $D(p,r)$ *oraz*

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(z-p)^{n-k}$$

dla $k\in\mathbb{N}$ *oraz* $z\in D(p,r)$*. W szczególności* $f^{(k)}(p)=k!a_k$*.*

- *Jeśli* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-p)^n$ *oraz* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-p)^n$ *w dysku* $D(p,r)$*, to* $a_n=b_n$ *dla każdego* $n=0,1,2,\dots$*.*

8 Równania Cauchy–Riemanna

Niech $f:\Omega\to\mathbb{C}$. Dla $x,y\in\mathbb{R}$ takich, że $x+iy\in\Omega$ określamy

$$u(x,y)=\operatorname{Re}f(x+iy),\quad v(x,y)=\operatorname{Im}f(x+iy),$$

czyli $f(z)=u(\operatorname{Re}z,\operatorname{Im}z)+iv(\operatorname{Re}z,\operatorname{Im}z)$.

Jeżeli u,v mają pochodne cząstkowe, to określamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x+iy)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y),\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x+iy)=\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+i\frac{\partial v}{\partial y}(x,y),$$

oraz

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right),\qquad \frac{\partial f}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Przykład **30.** *Niech* $f(z)=z^2$*. Dla* $z=x+iy$*, gdzie* $x,y\in\mathbb{R}$*, mamy wówczas*

$$f(x+iy)=(x^2-y^2)+i\cdot 2xy,$$

czyli $u(x,y)=x^2-y^2$*,* $v(x,y)=2xy$*. Mamy*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x+iy)=2x+i\cdot 2y,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x+iy)=-2y+i\cdot 2x,$$

czyli

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x+iy)=\frac{1}{2}\left(2x+i\cdot 2y-i(-2y+i\cdot 2x)\right)=\frac{1}{2}4(x+iy)=2z,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}(x+iy)=\frac{1}{2}\left(2x+i\cdot 2y+i(-2y+i\cdot 2x)\right)=0.$$

Twierdzenie **31.** *Jeśli* $f'(z)$ *istnieje,* $z=x+iy$*,* $x,y\in\mathbb{R}$*, to istnieją* $\frac{\partial f}{\partial x}(z)$*,* $\frac{\partial f}{\partial y}(z)$ *oraz* $\frac{\partial f}{\partial z}(z)=f'(z)$*,* $\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z)=0$

Dowód. Dla $h\in\mathbb{R}$ mamy

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h,y)+iv(x+h,y)-u(x,y)-iv(x,y)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h}+i\frac{v(x+h,y)-v(x,y)}{h}\right).$$

Zatem istnieją $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ oraz $f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$. Z drugiej strony

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x, y+ih) + iv(x, y+ih) - u(x,y) - iv(x,y)}{ih} = \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{u(x, y+h) - u(x,y)}{ih} + i\frac{v(x,y+h) - v(x,y)}{ih} \right) = \\
&= \lim_{h\to 0} \left(-i\frac{u(x, y+h) - u(x,y)}{h} + \frac{v(x,y+h) - v(x,y)}{h} \right).
\end{aligned}$$

Zatem istnieją $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ oraz $f' = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$. Stąd

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

więc

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} - i \cdot i\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{1}{2}\left(f'(z) + f'(z)\right) = f'(z)$$

oraz

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} + i \cdot i\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{1}{2}\left(f'(z) - f'(z)\right) = 0.$$

□

Uwaga **32.** *Równania Cauchy–Riemanna to: w wersji zespolonej*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = 0;$$

w wersji rzeczywistej

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Uwaga **33.** *(Przypomnienie) Mówimy, że $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, jest* różniczkowalna *w punkcie $a \in \Omega$, jeśli istnieje operator liniowy $T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ taki, że*

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(a+h) - F(a) - Th}{|h|} = 0.$$

Wówczas T jest zadany (w bazie standardowej) macierzą pochodnych cząstkowych.

Jeśli F ma ciągłe pochodne cząstkowe w otoczeniu punktu $a \in \Omega$, to F jest różniczkowalna w a.

Twierdzenie **34.** *Funkcja $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ ma (zespoloną) pochodną w punkcie $z_0 \in \Omega$ wtedy i tylko wtedy, gdy f, jako funkcja rzeczywista (tj. z $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$), jest różniczkowalna i spełnia w punkcie z_0 równania Cauchy–Riemanna.*

Dowód. Pomijamy. Uwaga: w całym dowodzie można założyć, że f spełnia równania Cauchy–Riemanna. □

9 Całki z funkcji zespolonych

Definicja **35.** *Funkcję $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ nazywamy* całkowalną, *jeśli funkcje rzeczywiste* $\operatorname{Re} f$ *oraz* $\operatorname{Im} f$ *są całkowalne (w sensie Lebesgue'a). W takim przypadku określamy całkę z f po $[a,b]$ jako*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \operatorname{Re} f(x)\,dx + i\int_a^b \operatorname{Im} f(x)\,dx.$$

Twierdzenie **36.** *Jeśli funkcja $\phi : [a,b] \to \mathbb{C}$ jest ciągła, a funkcja $\psi : [a,b] \to \mathbb{C}$ mierzalna i ograniczona, to funkcja*

$$f(z) = \int_a^b \frac{\psi(t)\,dt}{\phi(t) - z}$$

jest rozwijalna w szereg potęgowy na zbiorze $\Omega = \mathbb{C} \setminus \phi([a,b])$ (tzn. dla dowolnego $D(z_0,R) \subset \Omega$, f przedstawia się szeregiem potęgowym o środku w z_0 i promieniu zbieżności co najmniej R). W szczególności $f \in H(\Omega)$ oraz

$$f^{(n)}(z) = n!\int_a^b \frac{\psi(t)}{(\phi(t) - z_0)^{n+1}}\,dt.$$

Dowód. Niech $z_0 \in \Omega$, $R = \operatorname{dist}(z_0, \phi([a,b]))$. Mamy $R > 0$, bo zbiór $\phi([a,b])$ jest domknięty. Dla $z \in D(z_0,R)$

$$f(z) = \int_a^b \frac{\psi(t)\,dt}{\phi(t) - z} = \int_a^b \frac{\psi(t)\,dt}{(\phi(t) - z_0) - (z - z_0)} = \\ = \int_a^b \frac{\frac{\psi(t)\,dt}{\phi(t)-z_0}}{1 - \frac{z-z_0}{\phi(t)-z_0}}.$$

Ponieważ dla $z \in D(z_0,R)$ i $t \in [a,b]$ mamy

$$\frac{|z - z_0|}{|\phi(t) - z_0|} \le \frac{|z - z_0|}{R} < 1,$$

a funkcja $t \mapsto \frac{\psi(t)}{\phi(t)-z_0}$ jest ograniczona, więc

$$\frac{\psi(t)}{\phi(t) - z_0}\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\phi(t)-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi(t)}{\phi(t) - z_0}\left(\frac{z - z_0}{\phi(t) - z_0}\right)^n$$

i (z kryterium Weierstrassa) szereg ten jest zbieżny jednostajnie względem $t \in [a,b]$, dla każdego ustalonego z. Mamy więc

$$f(z) = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi(t)}{\phi(t) - z_0}\left(\frac{z - z_0}{\phi(t) - z_0}\right)^n dt = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b \frac{\psi(t)}{\phi(t) - z_0}\left(\frac{z - z_0}{\phi(t) - z_0}\right)^n dt = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \cdot \int_a^b \frac{\psi(t)}{(\phi(t) - z_0)^{n+1}}\,dt.$$

Holomorficzność f i wzór na pochodne wynikają z twierdzenia 27. □

10 Całka wzdłuż drogi

Definicja **37.** Drogą *będziemy nazywać dowolne odwzorowane* $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$*, które jest przedziałami klasy* C^1*. Dokładniej oznacza to, że istnieją* $\alpha = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = \beta$ *takie, że na każdym przedziale* $[s_{k-1}, s_k]$ *funkcje* $\operatorname{Re}\gamma$ *oraz* $\operatorname{Im}\gamma$ *mają ciągłe pochodne.*

Oznaczamy przez $\gamma^* = \gamma([\alpha, \beta])$ *obraz krzywej, tak więc* γ *jest odwzorowaniem, a* γ^* *podzbiorem* $\mathbb{C}$*.*

Jeśli $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$*, to drogę* γ *nazywamy* zamkniętą.

Definicja **38.** *Niech* $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ *będzie drogą, a* f *zespoloną funkcją ciągłą na* γ^**. Całkę z funkcji* f *wzdłuż* γ *definiujemy jako*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt.$$

Zmiana parametryzacji: Załóżmy, że $\phi : [\alpha_1, \beta_1] \to [\alpha, \beta]$ jest bijekcją klasy C^1, taką że $\phi(\alpha_1) = \alpha$, $\phi(\beta_1) = \beta$. Przyjmijmy $\gamma_1 = \gamma \circ \phi$. Wtedy γ_1 jest drogą sparametryzowaną odcinkiem $[\alpha_1, \beta_1]$. Mamy

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} f(z)\, dz &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\gamma_1(t))\, \gamma_1'(t)\, dt = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\gamma(\phi(t)))\, \gamma'(\phi(t))\, \phi'(t)\, dt = \\ &= \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt = \int_\gamma f(z)\, dz,\end{aligned}$$

czyli taka zmiana parametryzacji nie zmienia całki. Drogi różniące się tylko parametryzacją będziemy utożsamiać.

Orientacja ma znaczenie: Niech $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, $\phi(t) = \alpha + \beta - t$ i $\gamma_1 = \gamma \circ \phi$. Wtedy

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = -\int_\gamma f(z)\, dz.$$

Oznaczenie: $\gamma_1 = -\gamma$.

Łączenie dróg: Niech $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ oraz $\gamma_2 : [b, c] \to \mathbb{C}$ będą drogami takimi, że $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Można wtedy określić drogę $\gamma : [a, c] \to \mathbb{C}$ wzorem

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & \text{gdy } t \in [a, b], \\ \gamma_2(t), & \text{gdy } t \in [b, c]. \end{cases}$$

Wówczas

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz.$$

Oznaczenie: $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. (Oznaczenia tego używamy również wtedy, gdy drogi $\gamma_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{C}$ spełniają $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$, ale $b_1 \neq a_2 \ldots$).

Przykład **39.**

- *Dla* $a, b \in \mathbb{C}$*,* $a \neq b$*, drogę*

  $$\gamma(t) = a + (b - a)t, \quad t \in [0, 1],$$

  nazywamy odcinkiem zorientowanym *i oznaczamy przez* $\langle a, b \rangle$*. Tak samo nazywamy i oznaczamy drogę równoważną*

  $$\gamma_1(t) = \frac{a(\beta - t) + b(t - \alpha)}{\beta - \alpha}, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

- *(Zorientowany brzeg trójkąta) Jeśli (a,b,c) jest uporządkowaną trójką liczb zespolonych, to przez $\partial\Delta = \partial\Delta(a,b,c)$ oznaczamy drogę otrzymaną przez połączenie dróg $\langle a,b\rangle$ z $\langle b,c\rangle$ i z $\langle c,a\rangle$. Mamy więc*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int_{\langle a,b\rangle} f(z)\,dz + \int_{\langle b,c\rangle} f(z)\,dz + \int_{\langle c,a\rangle} f(z)\,dz$$

dla dowolnej funkcji ciągłej f.

Przykład **40.** *Obliczymy*

$$\int_\gamma \frac{dz}{z},$$

gdzie γ jest odcinkiem o początku w punkcie $-i$ i końcu w $1-i$...

11 Spójność

Definicja **41.** *Mówimy, że podzbiór E przestrzeni metrycznej jest* spójny, *jeśli z tego, że $E \subset G_1 \cup G_2$ dla rozłącznych zbiorów otwartych G_1, G_2 wynika, że $E \cap G_1 = \emptyset$ lub $E \cap G_2 = \emptyset$.*

Składową punktu *x w przestrzeni metrycznej (X,d) nazywamy sumę wszystkich podzbiorów spójnych przestrzeni X zawierających punkt x.*

Uwaga **42.** *Składowe punktów przestrzeni (X,d) są albo identyczne, albo rozłączne, wyznaczają one rozkład X na zbiory rozłączne i spójne.*

Przykład **43.** *Rysunki...*

12 Funkcja wykładnicza, funkcje trygonometryczne

Definicja **44.** *Funkcję wykładniczą definiujemy jako sumę szeregu*

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

a funkcje trygonometryczne jako

$$\sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}, \quad \cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Uwaga **45.** *Szereg definiujący eksponentę jest zbieżny (bezwzględnie) dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$. Wynika to z kryterium d'Alemberta, bo*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z^{n+1}/(n+1)!}{z^n/n!} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0.$$

Uwaga **46.** *Bezpośrednio z definicji funkcji sinus i kosinus otrzymujemy ich rozwinięcia w szeregi potęgowe*

$$\sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n z^n}{n!}}{2i} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \frac{i^n - (-i)^n}{2i}.$$

Ale $i^n - (-i)^n = 0$ *dla* n *parzystych,* $i^n - (-i)^n = 2i(-1)^k$ *dla* $n = 2k+1$*, więc*

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Podobnie pokazujemy, że

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}.$$

TWIERDZENIE **47.** *Dla dowolnych* $z, w \in \mathbb{C}$ *zachodzi* $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$*.*

Dowód. Ustalmy $w \in \mathbb{C}$ i połóżmy $f(z) = \exp(z+w)\exp(-z)$. Zachodzi $f'(z) = \exp(z+w)\exp(-z) - \exp(z+w)\exp(-z) = 0$ dla $z \in \mathbb{C}$, zatem z zadania na ćwiczeniach funkcja f jest stała. Biorąc $z = 0$ widzimy, że $f(z) = \exp(w)$, czyli

$$\exp(z+w)\exp(-z) = \exp(w).$$

Biorąc $w = 0$ dostajemy $\exp(z)\exp(-z) = 1$, czyli $\exp(-z) = 1/\exp(z)$ (w szczególności wartości eksponenty są różne od zera). W połączeniu z równością powyżej daje to tezę. $\square$

DEFINICJA **48.**

$$e := \exp(1).$$

UWAGA **49.** *Dla* $n \in \mathbb{Z}$ *mamy* $\exp(n) = e^n$*. Notacji* $e^z = \exp(z)$ *będziemy używać dla dowolnych liczb zespolonych* z*, choć należy pamiętać, że* e^z *oznacza dla* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ *sumę szeregu potęgowego* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$*, a nie potęgowanie.*

TWIERDZENIE **50.** *Istnieje najmniejsza liczba dodatnia* t_0*, dla której* $\cos t_0 = 0$*.*

Dowód. Na ćwiczeniach. $\square$

DEFINICJA **51.**

$$\pi := 2t_0,$$

gdzie t_0 *jest liczbą z powyższego twierdzenia.*

UWAGA **52.** *Dalsze własności funkcji* exp, sin, cos *oraz liczby* π *udowodnimy na ćwiczeniach.*

13 Indeks punktu względem drogi

Zauważmy, że dodatnio zorientowany okrąg o środku w a i promieniu $r > 0$ ma parametryzację

$$\gamma(t) = a + re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Mamy wtedy

$$\int_\gamma f(z)\,dz = ir \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) e^{it}\,dt.$$

Twierdzenie **53.** *Załóżmy, że γ jest drogą zamkniętą i $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Przyjmijmy dla $z \in \Omega$*

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w - z}.$$

Wtedy $\operatorname{Ind}_\gamma : \Omega \to \mathbb{C}$ jest funkcją o wartościach całkowitych, stałą na każdej składowej zbioru Ω i równą zeru na składowej nieograniczonej tego zbioru.

Dowód. Niech $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ oraz niech $\alpha = s_0 < s_1 < \ldots s_n = \beta$, przy czym $\gamma|_{[s_{k-1}, s_k]} \in C^1([s_{k-1}, s_k])$. Niech $S = \{s_0, s_1, \ldots s_n\}$. Ustalmy $z \in \Omega$, wtedy

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha^\beta \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, ds. \tag{2}$$

Zachodzi $\frac{w}{2\pi i} \in \mathbb{Z} \iff \exp(w) = 1$, zatem aby wykazać, że $\operatorname{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$, wystarczy uzasadnić, że $\varphi(\beta) = 1$, gdzie

$$\varphi(t) = \exp\left(\int_\alpha^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, ds \right), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Różniczkując powyższą równość dla $t \in [\alpha, \beta] \setminus S$ otrzymujemy

$$\varphi'(t) = \varphi(t) \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}.$$

Stąd

$$\left(\frac{\varphi(t)}{\gamma(t) - z} \right)'_t = \frac{\varphi'(t)(\gamma(t) - z) - \varphi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z)^2} = 0, \quad t \in [\alpha, \beta] \setminus S.$$

Ponieważ $\frac{\varphi}{\gamma - z}$ jest funkcją ciągłą na $[\alpha, \beta]$, która ma pochodną równą zeru na każdym odcinku (s_{k-1}, s_k), więc jest ona stała na każdym odcinku $[s_{k-1}, s_k]$, a zatem jest stała na $[\alpha, \beta]$. Wobec tego dla dowolnego $t \in [\alpha, \beta]$ zachodzi

$$\frac{\varphi(t)}{\gamma(t) - z} = \frac{\varphi(\alpha)}{\gamma(\alpha) - z} = \frac{\exp\left(\int_\alpha^\alpha \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, ds \right)}{\gamma(\alpha) - z} = \frac{1}{\gamma(\alpha) - z}$$

Ponieważ $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$, więc z powyższej równości wynika, że $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$. Stąd, jak wcześniej zauważyliśmy wynika, że $\operatorname{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$.

Z Twierdzenia 36 oraz (2) wynika, że $\operatorname{Ind}_\gamma \in H(\Omega)$, czyli w szczególności $\operatorname{Ind}_\gamma \in C(\Omega)$. Jeśli $G \subset \Omega$ jest (dowolną) składową spójności zbioru Ω, to obraz $\operatorname{Ind}_\gamma(\Omega)$ jest zbiorem spójnym zawartym w $\mathbb{Z}$, a zatem musi być jednopunktowy. To oznacza, że funkcja $\operatorname{Ind}_\gamma$ jest stała na G.

Zauważmy, że γ' jest funkcją ograniczoną na $[\alpha, \beta]$, powiedzmy, że $|\gamma'(s)| \leq M$. Ze wzoru (2) wynika, że

$$|\operatorname{Ind}_\gamma(z)| \leq \frac{1}{2\pi} (\beta - \alpha) \frac{M}{\operatorname{dist}(z, \gamma^*)} \to 0, \quad \text{gdy } |z| \to \infty.$$

Zatem dla dużych z, $|\operatorname{Ind}_\gamma(z)| < 1$, czyli $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0$ (bo $\operatorname{Ind}_\gamma$ przyjmuje tylko wartości całkowite). Stąd wynika ostatnia część twierdzenia. □

Przykład **54.** *Obliczymy* $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$ *dla* $\gamma(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ *i* $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. *(...)*

Przykład **55.** *Obliczymy* $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$ *dla* $\gamma = \partial\Delta$. *Pomysł: jeśli $z \in \Delta$, to rozważamy okrąg opisany na tym trójkącie i zapisujemy* $\operatorname{Ind}_\gamma$ *jako sumę/różnicę indeksów względem czterech dróg: okręgu oraz trzech dróg w kształcie 'łezek' (bok trójkąta + łuk okręgu). Indeks z względem łezek jest równy zero (jesteśmy w składowej nieograniczonej), a względem okręgu 1, stąd wynik. Uwaga: w podobny sposób można sobie poradzić z niektórymi innymi drogami.*

14 Twierdzenie i wzór Cauchy'ego, wnioski

Na ćwiczeniach udowodnimy, że

$$\int_\gamma F'(z)\,dz = F(b) - F(a),$$

jeśli $F \in H(\Omega)$, $F' \in C(\Omega)$, a γ jest drogą w Ω o początku w a i końcu w b.

Stąd natychmiast wynikają następujące twierdzenie i wniosek.

Twierdzenie **56.** *Jeśli $F \in H(\Omega)$ oraz $f = F' \in C(\Omega)$, to*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

dla dowolnej drogi zamkniętej γ w Ω. □

Wniosek **57.** *Zachodzi*

$$\int_\gamma z^n\,dz = 0 \quad, n = 0, 1, \ldots,$$

dla dowolnej drogi zamkniętej γ w $\mathbb{C}$. □

Przez *trójkąt* o wierzchołkach a, b, c rozumiemy najmniejszy zbiór wypukły zawierający a, b, c.

Twierdzenie **58** (Cauchy'ego dla trójkątów)**.** *Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ – otwarty, $p \in \Omega$. Niech $f \in H(\Omega \setminus \{p\}) \cap C(\Omega)$, wówczas dla trójkątów $\Delta \subset \Omega$ mamy*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$$

Dowód (jak w książce Rudina). Załóżmy najpiew, że $p \notin \Omega$. Niech a, b, c będą wierzchołkami Δ. $(\ldots)$

Następnie załóżmy, że p jest jednym z wierzchołków trójkąta Δ, np. $p = a$. Jeżeli a, b, c są współliniowe, to równość $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ zachodzi dla każdej funkcji ciągłej f. Jeśli nie, to wybierzmy punkty $x \in \langle a, b\rangle^*$, $y \in \langle a, c\rangle^*$ bliskie punktowi a i zauważmy, że

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Delta(a,b,c)} f(z)\,dz &= \left(\int_{\partial\Delta(a,x,y)} + \int_{\partial\Delta(x,b,y)} + \int_{\partial\Delta(b,c,y)}\right) f(z)\,dz \\ &= \int_{\partial\Delta(a,x,y)} f(z)\,dz + 0 + 0.\end{aligned}$$

Ponieważ biorąc x i y bliskie punktu a można sprawić, że obwód trójkąta $\partial\Delta(a, x, y)$ jest dowolnie mały, a funkcja f jest ograniczona na Δ, więc $\int_{\partial\Delta(a,b,c)} f(z)\,dz = 0$.

Wreszcie jeśli p jest dowolnym punktem z Δ różnym od wierzchołka, to stosując poprzedni wynik do trójkątów $\partial\Delta(a, b, p)$, $\partial\Delta(b, c, p)$, $\partial\Delta(c, a, p)$ i korzystając z równości

$$\int_{\partial\Delta(a,b,c)} f(z)\,dz = \left(\int_{\partial\Delta(a,b,p)} + \int_{\partial\Delta(b,c,p)} + \int_{\partial\Delta(c,a,p)}\right) f(z)\,dz$$

otrzymujemy pełny dowód twierdzenia. □

Definicja **59.** *Zbiór $E \subset \mathbb{C}$ nazywamy* gwiaździstym względem punktu *$p \in E$, jeśli*

$$\forall x \in E \quad \textit{odcinek } \langle p, x\rangle^* \subset E.$$

Zbiór E nazywamy gwiaździstym*, jeśli istnieje $p \in E$, względem którego E jest gwiaździsty.*

Oczywiście zbiory wypukłe są gwiaździste.

Twierdzenie **60.** *[Cauchy'ego dla zbioru gwiaździstego; o funkcji pierwotnej] Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ – otwarty, gwiaździsty, $p \in \Omega$. Niech $f \in H(\Omega\setminus\{p\}) \cap C(\Omega)$. Wówczas istnieje $F \in H(\Omega)$ taka, że $F' = f$ na Ω. W szczególności*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0,$$

jeśli γ jest drogą zamkniętą w Ω.

Dowód. Ustalmy punkt $p \in \Omega$, względem którego zbiór Ω jest gwiaździsty. Wówczas dla dowolnego $z \in \Omega$ odcinek $\langle p, z\rangle^* \subset \Omega$, możemy więc zdefiniować

$$F(z) = \int_{\langle p,z\rangle} f(w)\,dw, \quad z \in \Omega.$$

Ustalmy $z_0 \in \Omega$ i niech $r > 0$ będzie takie, że $D(z_0, r) \subset \Omega$. Wówczas dla $z \in D(z_0, r)$ trójkąt $\Delta(p, z_0, z) \subset \Omega$. Zatem z poprzedniego twierdzenia wynika, że

$$\begin{aligned} F(z) - F(z_0) &= \left(\int_{\langle p,z\rangle} - \int_{\langle p,z_0\rangle}\right) f(w)\,dw \\ &= \left(\int_{\partial\Delta(p,z,z_0)} + \int_{\langle z_0,z\rangle}\right) f(w)\,dw = \int_{\langle z_0,z\rangle} f(w)\,dw. \end{aligned}$$

Ponieważ $\int_{\langle z_0,z\rangle} 1\,dw = z - z_0$, więc

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z - z_0}\int_{\langle z_0,z\rangle} (f(w) - f(z_0))\,dw,$$

o ile $z \in D'(z_0, r) := D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Z ciągłości f w punkcie z_0 wynika, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta \in (0, r)$ taka, że $|f(w) - f(z_0)| < \varepsilon$, gdy $|w - z_0| < \delta$, a więc

$$\left|\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0)\right| \le \varepsilon,$$

o ile $z \in D'(z_0, \delta)$. Zatem $F'(z_0) = f(z_0)$. W szczególności, $F \in H(\Omega)$, a więc równość $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ wynika z twierdzenia 56. □

Twierdzenie **61** (wzór Cauchy'ego)**.** *Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ – otwarty, gwiaździsty, γ – droga zamknięta w Ω, $z \in \Omega \setminus \gamma^*$. Wówczas dla $f \in H(\Omega)$ mamy*

$$f(z)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\,dw.$$

Dowód. Ustalmy $z \in \Omega \setminus \gamma^*$ i przyjmijmy

$$g(w) = \begin{cases} \dfrac{f(w) - f(z)}{w - z}, & \text{gdy } w \in \Omega \setminus \{z\} \\ f'(z), & \text{gdy } w = z. \end{cases}$$

Wówczas $g \in H(\Omega \setminus \{z\})$ oraz $g \in C(\Omega)$, a zatem z twierdzenia 60 (Cauchy'ego)

Tutaj widać, czemu w twierdzeniu 60 zakładaliśmy tylko, że $f \in H(\Omega \setminus \{p\})$.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(w)\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{w - z}\,dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\,dw - \operatorname{Ind}_\gamma(z) f(z). \end{aligned}$$

□

Dalsze wnioski.

Wniosek **62.** *Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ – otwarty, gwiaździsty, γ – droga zamknięta w Ω, $p \in \Omega \setminus \gamma^*$. Wówczas dla $f \in H(\Omega)$ mamy*

$$(f \operatorname{Ind}_\gamma)^{(n)}(p) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w - p)^{n+1}}\,dw.$$

Dowód. Niech $\gamma : [\alpha, \beta] \to \Omega$. Mamy

$$\begin{aligned} g(p) := f(p)\operatorname{Ind}_\gamma(p) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w - p}\,dw = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{\gamma(t) - p}\,dt. \end{aligned}$$

Zatem, z jednego z poprzednich twierdzeń g rozwija się w szereg potęgowy, oraz

$$g^{(n)}(p) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{(\gamma(t) - p)^{n+1}}\,dt = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w - p)^{n+1}}\,dw.$$

□

Twierdzenie **63.** *Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ – dowolny otwarty, $f \in H(\Omega)$. Wówczas dla każdego $p \in \Omega$ funkcja f jest rozwijalna w szereg potęgowy o środku w p; szereg ten jest zbieżny na każdym dysku $D(p, R) \subset \Omega$, mamy ponadto*

$$f^{(n)}(p) = \frac{n!}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(p + re^{it})e^{-int}\,dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

jeśli $\overline{D(p, r)} \subset \Omega$.

Dowód. Niech $D(p, R) \subset \Omega$ oraz niech $0 < r < R$. Niech $\gamma(t) = p + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Ze wzoru Cauchy'ego dla $D(p, R)$ mamy

$$f(z) = f(z)\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\,dw, \quad \text{dla } z \in D(p, r).$$

Dalej,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\,dw,$$

więc z jednego z poprzednich twierdzeń f rozwija się w szereg potęgowy zbieżny na $D(p,r)$. Z dowolności wyboru $r < R$ oraz z jednoznaczności rozwinięcia w szereg potęgowy otrzymujemy pierwszą część tezy.

Ponadto

$$\begin{aligned} f^{(n)}(p) &= \frac{n!}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{(\gamma(t)-p)^{n+1}}\, dw = \\ &= \frac{n!}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(p+re^{it})rie^{it}}{(re^{it})^{n+1}}\, dw = \\ &= \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(p+re^{it})e^{-int}\, dt. \end{aligned}$$

□

WNIOSEK **64.** *Jeśli* $f \in H(\Omega \setminus \{p\}) \cap C(\Omega)$, *to* $f \in H(\Omega)$.

Dowód. Niech $D(p,r) \subset \Omega$. Ponieważ $D(p,r)$ jest wypukły, więc istnieje $F \in H(D(p,r))$ taka, że $F' = f$ na $D(p,r)$. Z poprzedniego twierdzenia F, jako funkcja holomorficzna, ma pochodne dowolnego rzędu na $D(p,r)$, w szczególności istnieje $F'' = f'$. □

TWIERDZENIE **65** (Morery)**.** *Niech* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *będzie zbiorem otwartym. Jeśli* $f \in C(\Omega)$ *oraz*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0$$

dla dowolnego trójkąta $\Delta \subset \Omega$, *to* $f \in H(\Omega)$.

Dowód. Niech $D(p,r) \subset \Omega$. Określmy

$$F(z) = \int_{\langle p,z\rangle} f(w)\, dw, \quad \text{dla } z \in D(p,r).$$

Tak jak poprzednio pokazujemy, że $F' = f$ na $D(p,r)$. Zatem $F \in H(D(p,r))$, więc również $f = F' \in H(D(p,r))$. Z dowolności $D(p,r) \subset \Omega$ wynika teza. □

PRZYKŁAD **66.** *Całkujemy* $f(z) = e^{iz^2}$ *po drodze zamkniętej złożonej z odcinków* $\langle 0,R\rangle$, $\langle R, R+Ri\rangle$, $\langle R+Ri, 0\rangle$. *Otrzymujemy, że*

$$\int_0^\infty \cos(t^2) + i\sin(t^2)\, dt = (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

PRZYKŁAD **67.** *Całkujemy* $f(z) = e^{i\xi z}e^{-z^2}$ *po brzegu prostokąta o wierzchołkach w* $\pm R$, $\pm R + ai$. *Okazuje się, że dobrze wybrać* $a = \ldots$. *Otrzymujemy, że* ...

15 Zera funkcji holomorficznych

TWIERDZENIE **68.** *Załóżmy, że* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *jest otwarty i spójny,* $f \in H(\Omega)$ *oraz*

$$Z(f) = \{a \in \Omega : f(a) = 0\}.$$

Wtedy albo $Z(f) = \Omega$, *albo* $Z(f)$ *nie ma punktu skupienia w* Ω. *W ostatnim przypadku, dla każdego* $a \in Z(f)$, *istnieje jedyna liczba całkowita* $m = m(a)$ *taka, że*

$$f(z) = (z-a)^m g(z) \quad (z \in \Omega),$$

gdzie $g \in H(\Omega)$ *i* $g(a) \neq 0$, *co więcej, zbiór* $Z(f)$ *jest co najwyżej przeliczalny.*

Dowód. Wg książki Rudina. $\square$

DEFINICJA **69.** *Jeśli $a \in \Omega$ oraz $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$, to mówimy, że f ma w punkcie a osobliwość* odosobnioną *(lub* izolowaną*). Gdy funkcję f można w punkcie a określić w ten sposób, że rozszerzona funkcja jest holomorficzna w Ω, to osobliwość nazywamy* pozorną.

TWIERDZENIE **70.** *Załóżmy, że $a \in \Omega$ i $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Ponadto załóżmy, że f jest funkcją ograniczoną na $D'(a, r)$ dla pewnego $r > 0$, lub ogólniej, że $\lim_{z\to a}(z - a)f(z) = 0$. Wtedy f ma w punkcie a osobliwość pozorną.*

Dowód. Określmy funkcję h następująco:

$$h(z) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } z = a, \\ (z-a)^2 f(z) & \text{gdy } z \in \Omega \setminus \{a\}. \end{cases}$$

Z założenia wynika, że $h'(a) = 0$. Ponieważ h ma pochodną zespoloną w każdym punkcie $\Omega \setminus \{a\}$, więc $h \in H(\Omega)$, a zatem

$$h(z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad (z \in D(a, r)).$$

Jeżeli przyjmiemy $f(a) = c_2$, to otrzymamy żądane rozszerzenie holomorficzne funkcji f, gdyż wtedy

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} (z-a)^n \quad (z \in D(a, r)).$$ $\square$

16 Dalsze wnioski ze wzoru Cauchy'ego

Przypomnijmy (zob. twierdzenie 63), że jeśli $f \in H(\Omega)$ oraz $\overline{D(p, r)} \subset \Omega$, to

$$f^{(n)}(p) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(p + re^{it}) e^{-int}\, dt, \quad n = 0, 1, \dots.$$

Szczególnie ważny jest przypadek $n = 0$:

TWIERDZENIE **71** (o wartości średniej)**.** *Jeśli $f \in H(\Omega)$ oraz $\overline{D(p, r)} \subset \Omega$, to*

$$f(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p + re^{it})\, dt.$$

TWIERDZENIE **72** (nierówności Cauchy'ego)**.** *Jeśli $f \in H(D(a, R))$ oraz $|f| \le M$, to*

$$|f^{(n)}(a)| \le \frac{n! M}{R^n}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Dowód. Dla $r < R$

$$|f^{(n)}(p)| = \frac{n!}{2\pi r^n} \left| \int_0^{2\pi} f(p + re^{it}) e^{-int}\, dt \right| \le \frac{n! M}{r^n}.$$ $\square$

Z powyższych nierówności natychmiast otrzymujemy następujący

WNIOSEK **73.** *Jeśli $f \in H(\Omega)$ spełnia nierówność $|f| \le M$, to*

$$|f^{(n)}(z)| \le \frac{n!M}{\operatorname{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega)^n}, \quad z \in \Omega,\, n = 1, 2, \ldots.$$

Funkcje holomorficzne na $\mathbb{C}$ nazywamy *całkowitymi.*

TWIERDZENIE **74** (Liouville'a)**.** *Ograniczone funkcje całkowite są stałe.*

Dowód. Niech $f \in H(\mathbb{C})$, funkcja f rozwija się w szereg potęgowy wokół 0 o nieskończonym promieniu zbieżności. Niech $|f| \le M$, dla $n = 1, 2, \ldots$ z nierówności Cauchy'ego otrzymujemy

$$|f^n(0)| \le \frac{n!M}{R^n} \to 0, \quad \text{przy } R \to \infty.$$

Zatem w rozwinięciu w szereg potęgowy wyrazy przy z^n są równe 0 dla $n > 0$, czyli f jest stała. □

TWIERDZENIE **75** (zasadnicze twierdzenie algebry)**.** *Każdy wielomian zespolony stopnia dodatniego ma (przynajmniej jeden) pierwiastek.*

Dowód. Zauważmy, że jeśli $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$, gdzie $a_n \ne 0$ i $n > 0$, to $\frac{1}{P(z)} = \frac{1}{a_n z^n (1 + a_{n-1}/z + \ldots + a_0/z^n)} \to 0$, gdy $|z| \to \infty$. Zatem jeśli P nie miałby pierwiastków, to funkcja $1/P$ byłaby ograniczona i całkowita, więc z twierdzenia Liouville'a byłaby stała. □

TWIERDZENIE **76** (o maksimum modułu)**.** *Jeśli $\Omega \subset \mathbb{C}$ jest otwarty i spójny, $f \in H(\Omega)$ oraz $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$, to*

$$|f(a)| \le \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(a + re^{i\theta})|,$$

przy czym równość zachodzi jedynie wtedy, gdy f jest funkcją stałą.

Dowód. Nierówność natychmiastową konsekwencją twierdzenia 71 o wartości średniej. Załóżmy, że $|f(a)| = \max_{\theta \in [0,2\pi]} |f(a + re^{i\theta})|$ i niech c będzie liczbą o module 1 taką, że $cf(a) = |f(a)|$. Wówczas

$$\operatorname{Re} cf(a + re^{it}) \le |cf(a + re^{it})| = |f(a + re^{it})| \le |f(a)|.$$

Z twierdzenia o wartości średniej wynika, że

$$\begin{aligned} 0 = c\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f(a + re^{it}) - f(a))\,dt\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\big(cf(a + re^{it}) - |f(a)|\big)\,dt \\ = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\operatorname{Re} cf(a + re^{it}) - |f(a)|)\,dt. \end{aligned}$$

Ponieważ funkcja podcałkowa jest ciągła, niedodatnia i ma całkę zero, więc jest ona stale równa zero, czyli

$$\operatorname{Re} cf(a + re^{it}) = |f(a)| = cf(a), \quad (t \in [0, 2\pi]).$$

Wynika stąd, że $\operatorname{Im} cf(a + re^{it}) = 0$ dla $t \in [0, 2\pi]$, bo gdyby $|\operatorname{Im} cf(a + re^{it})| > 0$, to mielibyśmy $|cf(a + re^{it})| > \operatorname{Re} cf(a + re^{it}) = cf(a) = |f(a)|$. Zatem $cf(a + re^{it}) = cf(a)$ dla $t \in [0, 2\pi]$, czyli $f(z) = f(a)$ dla $|z - a| = r$, i spójność Ω implikuje $f(z) = f(a)$ na Ω. □

17 Osobliwości izolowane funkcji holomorficznych

Twierdzenie **77** (Klasyfikacja osobliwości, twierdzenie 10.21 z Rudina)**.** *Jeśli $a \in \Omega$ i $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$, to zachodzi jedna z trzech następujących możliwości:*

(a) *funkcja f ma osobliwość pozorną w punkcie a;*

(b) *istnieje liczba naturalna m i liczby zespolone $c_1, \ldots, c_m$, $c_m \neq 0$ takie, że funkcja*

$$f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$$

ma osobliwość pozorną w punkcie a;

(c) *dla dowolnej liczby $r > 0$ takiej, że $D(a,r) \subset \Omega$ zbiót $f(D'(a,r))$ jest gęsty na płaszczyźnie $\mathbb{C}$.*

W przypadku (b) mówimy, że funkcja f ma w punkcie a *biegun rzędu m*. Funkcję

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k} = \sum_{k=1}^{m} c_k (z-a)^{-k},$$

będącą wielomianem ze względu na $(z-a)^{-1}$, nazywamy *częścią główną* funkcji f w punkcie a. W przypadku (b) zachodzi

$$f(z) = \left(f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k} \right) + (z-a)^{-m} \sum_{k=1}^{m} c_k (z-a)^{m-k} \to \infty, \quad \text{gdy } z \to a$$

(ponieważ wyrażenie w nawiasie ma granicę skończoną, $(z-a)^{-m} \to \infty$ oraz $\sum_{k=1}^{m} c_k (z-a)^{m-k} \to c_m \neq 0$).

W przypadku (c) mówimy, że funkcja f ma w punkcie a *istotną osobliwość*.

Dowód. W Rudinie. □

18 Residua

Definicja **78.** *Jeżeli $\Omega \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem otwartym, $a \in \Omega$ oraz $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$ ma biegun w a z częścią główną $Q(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$, to liczbę c_1 nazywamy* residuum *funkcji f w punkcie a i oznaczamy symbolem* $\mathrm{res}(f, a)$.

Definicja **79.** *Funkcję f nazywamy* meromorficzną *w zbiorze otwartym Ω, jeśli istnieje zbiór $A \subset \Omega$ taki, że*

- *A nie posiada punktów skupienia w Ω;*
- *$f \in H(\Omega \setminus A)$;*
- *f ma biegun w każdym punkcie zbioru A.*

Lemat **80.** *Jeśli γ jest drogą zamkniętą w $\mathbb{C}$, $Q(z)=\sum_{k=1}^{m}\frac{c_k}{(z-a)^k}$ oraz $a\notin\gamma^*$, to*

$$\int_\gamma Q(z)\,dz = 2\pi i\, c_1 \operatorname{Ind}_\gamma(a).$$

Dowód.

$$\int_\gamma \frac{c_k}{(z-a)^k}\,dz = \begin{cases} 0, & \text{gdy } k>1;\\ 2\pi i\cdot c_1 \operatorname{Ind}_\gamma(a) & \text{gdy } k=1.\end{cases}$$

□

Twierdzenie **81.** *Jeśli Ω jest zbiorem gwiaździstym, f funkcją meromorficzną na Ω ze skończonym zbiorem biegunów $A=\{a_1,\dots a_n\}$ oraz γ drogą zamkniętą w $\Omega\setminus A$, to*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}(f,a_k)\operatorname{Ind}_\gamma(a_k).$$

Dowód. Niech Q_k będzie częścią główną bieguna f w punkcie a_k, $k=1,\dots,n$. Wówczas $f-(Q_1+\ldots+Q_n)$ ma tylko osobliwości usuwalne w Ω, a zatem z twierdzenia Cauchy'ego

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (Q_1+\ldots+Q_n)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}(f,a_k)\operatorname{Ind}_\gamma(a_k).$$ □

Przykład **82.** *Obliczymy*

$$\int_\gamma \frac{dz}{\sin z}$$

gdzie γ jest dodatnio zorientowanym okręgiem jednostkowym.

Uwaga **83.** *Założenie o skończoności zbioru A można usunąć. Istotnie, niech Ω będzie gwiaździsty względem z_0, wówczas zbiory*

$$\Omega_t = \left(t(\Omega - z_0)\cap D(z_0,\frac{1}{1-t})\right) + z_0,\quad t\in(0,1),$$

są gwiaździste (rysunek), $\overline{\Omega_s}\subset\Omega_t$ dla $0<s<t<1$ i $\cup_{t\in(0,1)}\Omega_t=\Omega$. Wobec tego Ω_t stanowią pokrycie otwarte zbioru zwartego γ^*, czyli istnieje t takie, że $\gamma^*\subset\Omega_t$. Ze zwartości $\overline{\Omega_t}$ wynika, że f ma tylko skończenie wiele biegunów w Ω_t. Można więc skorzystać z udowodnionego wyżej twierdzenia dla funkcji f, drogi γ i obszaru Ω_t.

19 Obliczanie pewnych całek za pomocą rachunku residuów

Twierdzenie **84.** *Jeśli funkcja meromorficzna ma w a biegun rzędu $\le m$, to*

$$\operatorname{res}(f,a) = \lim_{z\to a}\frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right].$$

W szczególności, gdy biegun jest rzędu 1, to

$$\operatorname{res}(f,a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

Dowód. Na ćwiczeniach. □

PRZYKŁAD **85.** *Obliczymy*

$$\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{x^4+x^2+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Metoda: można całkować po ćwiartce okręgu; można by też po półokręgu, ale tu to się nie opłaca. Wynik uboczny: $\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{x^4-x^2+1} = \frac{\pi}{2}$.

Podobnie można obliczać całki po $\mathbb{R}$ *z funkcji wymiernych* P/Q*, gdy* $\deg Q \geq \deg P + 2$ *oraz* Q *nie ma zer rzeczywistych.*

PRZYKŁAD **86.** *Obliczymy, dla* $a \in \mathbb{C}$, $|a| > 1$*, całkę*

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-2a\cos t + a^2} = \frac{2\pi}{a^2-1}.$$

Metoda: zamieniamy tę całkę na całkę po okręgu jednostkowym z pewnej funkcji meromorficznej.

Podobnie można obliczać całki po $[0, 2\pi]$ *z funkcji* $R(\cos t, \sin t)$*, gdzie* R *jest funkcją wymierną.*

20 Twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym

TWIERDZENIE **87.** *Jeśli* $f \in H(\Omega\setminus\{a\})$ *ma biegun rzędu* m *w punkcie* $a \in \Omega$*, to* $\frac{f'}{f}$ *ma biegun rzędu* 1 *w punkcie* a*, oraz*

$$\operatorname{res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = -m.$$

Dowód. Zachodzi równość $f(z) = g(z)(z-a)^{-m}$ dla pewnej funkcji $g \in H(\Omega)$ takiej, że $g(a) \neq 0$. Wówczas

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(z-a)^{-m}g'(z) - m(z-a)^{-m-1}g(z)}{(z-a)^{-m}g(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \frac{-m}{z-a}$$

skąd $\dfrac{-m}{z-a}$ jest częścią główną bieguna funkcji $\dfrac{f'}{f}$ w punkcie a. □

TWIERDZENIE **88.** *Jeśli* $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$ *ma zero krotności* m *w punkcie* $a \in \Omega$*, to* $\frac{f'}{f}$ *ma biegun rzędu* 1 *w punkcie* a*, oraz*

$$\operatorname{res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = m.$$

Dowód. Zachodzi równość $f(z) = g(z)(z-a)^m$ dla pewnej funkcji $g \in H(\Omega)$ takiej, że $g(a) \neq 0$. Wówczas

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(z-a)^m g'(z) + m(z-a)^{m-1}g(z)}{(z-a)^m g(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \frac{m}{z-a}$$

skąd $\dfrac{m}{z-a}$ jest częścią główną bieguna funkcji $\dfrac{f'}{f}$ w punkcie a. □

Twierdzenie **89.** *Niech $f \in H(\Omega)$, $\overline{D(p,r)} \subset \Omega$ oraz $\gamma(t) = p + re^{it}$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$. Niech $\Gamma(t) = f(\gamma(t))$. Jeśli $w \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, to $\mathrm{Ind}_\Gamma(w)$ jest liczbą zer funkcji $f - w$ w $D = D(p, r)$ (liczonych wraz z krotnościami).*

Dowód. Niech $a_1, a_2, \dots, a_k$ będą zerami funkcji $f - w$ w dysku D oraz niech N będzie liczbą tych zer, liczonych wraz z krotnościami. Wówczas

$$N = \sum_{j=1}^{k} \operatorname{res}\Big(\frac{(f-w)'}{f-w}, a_j\Big) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t)) - w}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t) - w}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z - w} = \mathrm{Ind}_\Gamma(w). \qquad \square$$

Przykład **90.** *Niech $f(z) = z^2$, $D = D(p,r) = D(1/2, 1)$, czyli $\gamma(t) = 1/2 + e^{it}$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$. Wówczas $\Gamma(t) = f(\gamma(t)) = 1/4 + e^{it} + e^{2it}$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$.*

Górny rysunek 1: *Okrąg γ jest zaznaczony na niebiesko, zaś droga Γ na czerwono.*

W zielonym obszarze indeks względem Γ jest równy 2, co oznacza, że funkcja f przyjmuje każdą wartość z zielonego obszaru dwukrotnie na dysku D. (Ściślej, dwukrotnie licząc krotności: wartość zero jest przyjmowana tylko w zerze, ale f ma tam zero krotności 2).

W pomarańczowym obszarze indeks względem Γ jest równy 1, co oznacza, że funkcja f przyjmuje każdą wartość z zielonego obszaru dokładnie raz na dysku D.

Dolny rysunek 1: *Zaznaczone są przeciwobrazy obszarów pomarańczowego i zielonego z górnego rysunku. W zielonej „soczewce” f jest „dwukrotna”, tj. przyjmuje każdą swoją wartość dokładnie dwa razy (licząc krotności).Jest to oczywiste, bo obszar ten jest symetryczny względem 0. W pomarańczowym „księżycu” f jest różnowartościowa.*

Twierdzenie **91.** *Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem (czyli otwartym zbiorem spójnym), $f \in H(\Omega)$, $f \neq const$, $z_0 \in \Omega$, $w_0 = f(z_0)$ oraz m będzie krotnością zera funkcji $f - w_0$ w punkcie z_0. Wówczas istnieją zbiory otwarte V oraz W takie, że $z_0 \in V \subset \Omega$, $W = f(V)$ i dla każdego $w \in W \setminus \{w_0\}$ istnieje dokładnie m różnych punktów $z \in V$ takich, że $f(z) = w$.*

Dowód. (...) $\square$

Wnioski:

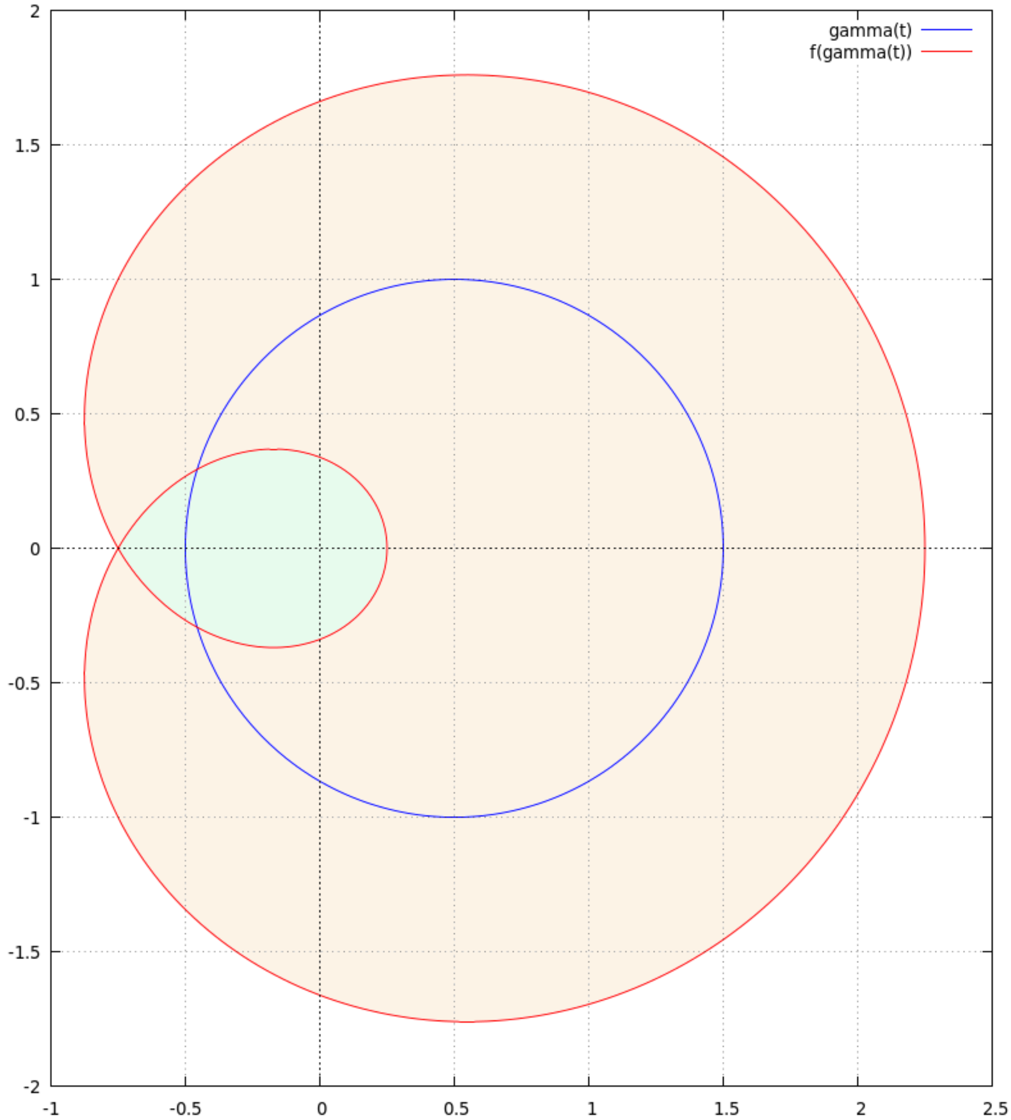
Twierdzenie **92.** *(o odwzorowaniu otwartym) Jeśli $f \in H(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ – obszar, to $f = const$ lub f jest odwzorowaniem otwartym, tzn. obrazy zbiorów otwartych są otwarte.*

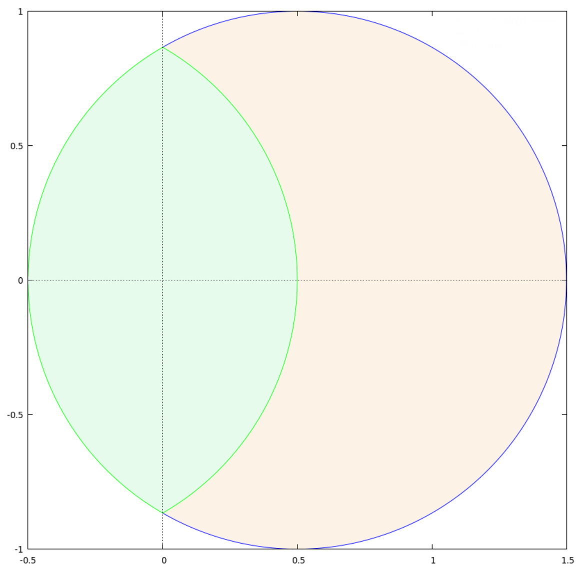
Twierdzenie **93.** *(zasada maksimum modułu) Jeśli $f \in H(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ – obszar, oraz $|f|$ ma lokalne maksimum w Ω, to $f = const$.*

Twierdzenie **94.** *(o odwzorowaniu odwrotnym) Jeśli $f \in H(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ – obszar, oraz f jest różnowartościowa, to $f' \neq 0$ na Ω, funkcja odwrotna $f^{-1} \in H(f(\Omega))$ oraz $(f^{-1})'(w) = 1/f'(z)$, gdzie $f(z) = w$.*

Twierdzenie **95.** *Niech Ω będzie obszarem w $\mathbb{C}$, $f \in H(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$, $w_0 = f(z_0)$ oraz $f'(z_0) \neq 0$. Wówczas istnieją otoczenia V, W takie, że $z_0 \in V$, $f(z_0) \in W$ oraz f jest różnowartościowym odwzorowaniem V na W. Ponadto jeśli $g = (f|_V)^{-1}$, to $g \in H(W)$.*

Rysunek 1: Rysunek do przykładu 90.





21 Przykład

Przypomnijmy, że dla zbioru $E, F \subset \mathbb{C}$ i $z \in \mathbb{C}$ określamy odległości z od E oraz E od F wzorami

$$\operatorname{dist}(z, E) = \inf_{w \in E} |w - z|, \ \operatorname{dist}(E, F) = \inf_{w \in E, z \in F} |w - z|.$$

LEMAT **96.** *Jeśli* $F \subset \mathbb{C}$ *jest domknięty,* $K \subset \mathbb{C}$ *zwarty, oraz* $K \cap F = \emptyset$*, to* $\operatorname{dist}(K, F) > 0$.

Dowód. Niech $z, w \in \mathbb{C}$ będą takie, że $\operatorname{dist}(z, F) \geq \operatorname{dist}(w, F)$. Wówczas

$$\begin{aligned}
|\operatorname{dist}(z, F) - \operatorname{dist}(w, F)| &= \operatorname{dist}(z, F) - \operatorname{dist}(w, F) \\
&= \inf_{p \in F} |z - p| - \operatorname{dist}(w, F) \\
&\leq \inf_{p \in F} (|z - w| + |w - p|) - \operatorname{dist}(w, F) \\
&= |z - w| + \inf_{p \in F} |w - p| - \operatorname{dist}(w, F) = |z - w|.
\end{aligned}$$

Przez symetrię dostajemy więc, że

$$|\operatorname{dist}(z, F) - \operatorname{dist}(w, F)| \leq |z - w|,$$

skąd wynika, że funkcja $\operatorname{dist}(\cdot, F)$ jest ciągła na $\mathbb{C}$. (Tutaj nie korzystaliśmy z domkniętości F).

Uzasadnimy nie wprost, że jeśli $z \notin F$, to $\operatorname{dist}(z, F) > 0$. Gdyby $0 = \operatorname{dist}(z, F) = \inf_{w \in F} |z - w|$, to z definicji infimum istniałby ciąg $w_n \in F$ taki, że $|z - w_n| \to 0$. Ale to oznacza, że $w_n \to z$, więc z domkniętości zbioru F mamy $z \in F$, sprzeczność.

Niech $h(z) = \operatorname{dist}(z, F)$, pokazaliśmy dotychczas, że h jest ciągła na $\mathbb{C}$ oraz $h > 0$ na K. Wobec tego $h(K)$ jest zwartym podzbiorem $(0, \infty) = \cup_{t>0}(t, \infty)$, z ostatniego pokrycia otwartego można wybrać podpokrycie skończone $K \subset \cup_{k=1}^{n}(t_k, \infty)$, gdzie $0 < t_1 < \ldots < t_n$. Ale $\cup_{k=1}^{n}(t_k, \infty) = (t_1, \infty)$, czyli innymi słowy, $h(z) > t_1$ dla $z \in K$. To oznacza, że $\operatorname{dist}(K, F) = \inf_{z \in K} \operatorname{dist}(z, F) = \inf_{z \in K} h(z) \geq t_1 > 0$. □

PRZYKŁAD **97.** *Obliczymy, początkowo dla* $a, b > 0$, $a \neq b$*, całkę*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{b^2 - a^2} \left(\frac{e^{-a}}{a} - \frac{e^{-b}}{b} \right).$$

Piszemy $\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix})$*, lemat Jordana, itd.*

A co gdy np. $a \notin \mathbb{R}$*? Sensownie rozważać* a *np. z półpłaszczyzny* $\Omega = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$*. Obie strony powyższej równości są holomorficzne na* Ω *jako funkcje* $a \in \Omega \setminus \{b\}$ *(holomorficzność lewej strony jest konsekwencją tw. Morery, ale wymaga sprawdzenia), i są sobie równe dla* $a > 0$, $a \neq b$*. Stąd z twierdzenia o zerach powyższa równość zachodzi dla dowolnych* $a \in \Omega \setminus \{b\}$*. Stąd też można policzyć wartość całki dla* $a = b$*, przechodząc do granicy* $a \to b$*, ale nie będziemy tego robić (całkę tę można też policzyć bezpośrednio).*

Sprawdzimy teraz dokładniej, że funkcja

$$h(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)},$$

(wystepująca po lewej stronie) jest funkcją holomorficzną zmiennej $a \in \Omega$*. (*$b > 0$ *jest tutaj ustalone). Po pierwsze,* h *jest ciągła na* Ω*: jeśli* $\Omega \ni a_n \to a \in \Omega$*, to dla dużych* n *zachodzi* $a_n \in \overline{D(a, \varepsilon)} \subset \Omega$*. Obraz* $\overline{D(a, \varepsilon)}$ *przez funkcję* $f(z) = z^2$ *jest zwartym podzbiorem* $f(\Omega) = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$*, wobec tego z poprzedniego lematu*

$$m := \operatorname{dist}(f(\overline{D(a, \varepsilon)}), (-\infty, 0]) > 0.$$

To oznacza, że dla $a_n \in \overline{D(a,\varepsilon)}$ *oraz* $x \in \mathbb{R}$ *zachodzi*

$$|a_n^2 + x^2| = |a_n^2 - (-x^2)| \geq \operatorname{dist}(f(\overline{D(a,\varepsilon)}), (-\infty, 0]) = m > 0.$$

Zatem

$$\left|\frac{\cos x\, dx}{(x^2+a_n^2)(x^2+b^2)}\right| \leq \frac{1}{m(x^2+b^2)},$$

więc z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej $h(a_n) \to h(a)$.

Jeśli trójkąt $\Delta \subset \Omega$, *to podobnie jak poprzednio* $f(\Delta)$ *jest zwartym podzbiorem* $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, *wobec tego dla* $a \in \Delta$ *i* $x \in \mathbb{R}$

$$|a^2 + x^2| = |a^2 - (-x^2)| \geq \operatorname{dist}(f(\Delta), (-\infty, 0]) =: m_2 > 0.$$

Zatem

$$\int_{\partial\Delta}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\right| dx\,|da| \leq \int_{\partial\Delta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{m_2(x^2+b^2)}\, dx\,|da| < \infty.$$

Można więc stosować twierdzenie Fubiniego,

$$\int_{\partial\Delta} h(a)\, da = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\partial\Delta}\frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\, da\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} 0\, dx = 0.$$

Z twierdzenia Morery $h \in H(\Omega)$.

Przykład **98.** *Jak obliczyć*

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x\, dx}{x(x^2+1)} = \pi(1 - 1/e)?$$

Uwaga na osobliwość (pozorną) w 0. *Trzeba napisać* $\sin x = \operatorname{Im}(e^{ix} - 1)$ *(dla* $x \in \mathbb{R}$*), żeby nie dostać bieguna w* 0.

22 Twierdzenie Rouché

Twierdzenie **99.** *(Rouché) Jeśli* $f, g \in H(\Omega)$, $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ *oraz*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \text{dla } |z-a| = r,$$

to f, g *mają tę samą liczbę zer w* $D(a,r)$ *(licząc z krotnościami).*

Dowód. Niech $Z(f)$, $Z(g)$ oznaczają liczby zer funkcji f i g w $D(a,r)$ (licząc z krotnościami). Niech $\gamma(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Wówczas na mocy twierdzenia 89

$$Z(f) = \operatorname{Ind}_{f\circ\gamma}(0), \qquad Z(g) = \operatorname{Ind}_{g\circ\gamma}(0).$$

Ponadto $\operatorname{Ind}_{f\circ\gamma}(0) = \operatorname{Ind}_{g\circ\gamma}(0)$ z założeń oraz zadania z ćwiczeń. □

Przykład **100.** *Ile pierwiastków w dysku* $\overline{D(0,1)}$ *ma funkcja* $f(z) = z^4 - 5z + 1$?

Rozwiązanie. *Stosujemy twierdzenie Rouché dla* f *i* $g(z) = -5z + 1$.

23 Zbieżność niemal jednostajna

Jak zwykle, $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem otwartym. Piszemy $K \subset\subset \Omega$, gdy K jest zwartym podzbiorem Ω.

Mówimy, że $f_n \in C(\Omega)$ zbiegają *niemal jednostajnie* (nj.) do f w Ω, jeśli $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_K = 0$ dla każdego $K \subset\subset \Omega$.

TWIERDZENIE **101.** *Jeśli $f_n \in H(\Omega)$ oraz $f_n \to f$ nj. w Ω, to $f \in H(\Omega)$.*

Dowód. Na ćwiczeniach. $\square$

LEMAT **102.** *Niech $K \subset\subset \Omega$, $j \in \mathbb{N}$. Wówczas istnieją stała c i zbiór $K' \subset\subset \Omega$ takie, że dla dowolnej funkcji $f \in H(\Omega)$ zachodzi*

$$\|f^{(j)}\|_K \le c\|f\|_{K'}.$$

Dowód. Niech $\delta = \operatorname{dist}(K, \Omega^c)/2 > 0$. Przyjmujemy

$$K' = \bigcup_{z\in K} \overline{D(z,\delta)} = \{z : \operatorname{dist}(z, K) \le \delta\}.$$

Zauważamy, że $K' \subset\subset \Omega$. Z nierówności Cauchy'ego zastosowanej do dysku $D(z, \delta)$ otrzymujemy

$$|f^{(j)}(z)| \le \frac{j!}{\delta^j}\|f\|_{D(z,\delta)} \le \frac{j!}{\delta^j}\|f\|_{K'},$$

skąd po wzięciu $\sup_{z\in K}$ dostajemy tezę. $\square$

TWIERDZENIE **103.** *Załóżmy, że $f_n \in H(\Omega)$ zbiegają nj. do f w Ω. Wówczas dla dowolnego $k = 1, 2, \ldots$*

$$f_n^{(k)} \to f^{(k)} \quad \textit{nj. w } \Omega.$$

Dowód. Niech $K \subset\subset \Omega$. Z poprzedniego lematu

$$\|f_n^{(k)} - f^{(k)}\|_K \le c\|f_n - f\|_{K'} \to 0,$$

gdy $n \to \infty$. $\square$

PRZYKŁAD **104.** *(Funkcja dzeta Riemanna) Niech $\Omega = \{z : \operatorname{Re} z > 1\}$. Dla $z \in \Omega$ niech*

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\exp(z \ln n)}.$$

Zauważmy, że funkcje $z \mapsto \frac{1}{\exp(z\ln n)} = \frac{1}{n^z}$ są całkowite (dla $n \in \mathbb{N}$) oraz

$$\left|\frac{1}{n^z}\right| = |\exp(-z\ln n)| = \exp(-\operatorname{Re} z \ln n) = \frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}}.$$

Zatem z kryterium Weierstrassa, na każdej półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} z \ge 1 + \varepsilon > 1$ szereg definiujący funkcję ζ jest zbieżny jednostajnie. Ponieważ każdy zbiór zwarty $K \subset \Omega$ jest zawarty w pewnej półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} z \ge 1 + \varepsilon > 1$, więc szereg definiujący funkcję ζ jest zbieżny nj. na Ω. Wobec tego $\zeta \in H(\Omega)$.

Zauważmy, że z poprzedniego twierdzenia wynika *zbieżność niemal jednostajna na Ω szeregu pochodnych*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\ln n}{n^z}$$

do funkcji $\zeta'(z)$. (Za f_n w poprzednim twierdzeniu bierzemy ciąg sum częściowych $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^z}$).

24 ♡ Metryka zbieżności niemal jednostajnej

Ten rozdział pomijamy!

Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem otwartym oraz $K \subset\subset \Omega$. Przypomnijmy, że przestrzeń $C(K)$ (zespolonych funkcji ciągłych na K) z normą $\|f\|_K := \sup_{z\in K} |f(z)|$ jest przestrzenią Banacha.

Ustalmy ciąg zbiorów $K_n \subset\subset \Omega$ takich, że $K_n \subset \operatorname{Int} K_{n+1}$ oraz $\bigcup K_n = \Omega$. Np. można wziąć

$$K_n = \{z \in \Omega : \operatorname{dist}(z, \Omega^c) \geq \frac{1}{n}\} \cap \overline{D(0,n)}.$$

Dla funkcji $f, g \in C(\Omega)$ określamy

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\min\{\|f-g\|_{K_n}, 1\}}{2^n}.$$

Twierdzenie **105.** *Funkcja d jest metryką na $C(\Omega)$. Zbieżność w tej metryce jest równoważna zbieżności niemal jednostajnej.*

Dowód. Na ćwiczeniach. □

Twierdzenie **106.** *Przestrzeń metryczna $(C(\Omega), d)$ jest zupełna. Przestrzeń $H(\Omega)$ jest domkniętą podprzestrzenią $(C(\Omega), d)$.*

Dowód. Niech $f_n \in C(\Omega)$ będzie ciągiem Cauchy'ego i niech $p \in \mathbb{N}$. Wówczas dla n, m na tyle dużych, by $\|f_n - f_m\|_{C(\Omega)} < 2^{-p}$ zachodzi

$$\begin{aligned}\|f_n - f_m\|_{C(\Omega)} &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\min\{\|f_n - f_m\|_{K_j}, 1\}}{2^j} \\ &\geq \frac{\min\{\|f_n - f_m\|_{K_p}, 1\}}{2^p} = 2^{-p}\|f_n - f_m\|_{K_p},\end{aligned}$$

czyli obciecia f_n do K_p tworzą ciąg Cauchy'ego w przestrzeni $C(K_p)$. Ponieważ przestrzeń ta jest zupełna, więc istnieje $g_p \in C(K_p)$ takie, że $f_n \rightrightarrows g_p$ na K_p, przy $n \to \infty$.

Zauważmy, że dla tak zdefiniowanych funkcji g_p zachodzi $g_p = g_q$ na $K_p \cap K_q = K_p$, gdy $p < q$: jest tak dlatego, że $f_n \rightrightarrows g_p$ na K_p oraz $f_n \rightrightarrows g_q$ na K_q (czyli w szczególności na K_p). Wobec tego następująca definicja

$$g(x) = g_p(x), \quad \text{gdy } x \in K_p$$

jest poprawna i określa funkcję na Ω. Ponieważ $g \restriction_{\operatorname{Int} K_p} = g_p \restriction_{\operatorname{Int} K_p}$, więc g jest ciągła na każdym $\operatorname{Int} K_p$, czyli wszędzie na Ω.

Pozostaje pokazać, że $f_n \to g$ nj. na Ω. Ponieważ

$$\|f_n - g\|_{K_j} \to 0 \quad \text{dla każdego } j,$$

$$\frac{\min\{\|f_n - f_m\|_{K_j}, 1\}}{2^j} \leq 2^{-j},$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} < \infty,$$

więc na mocy tw. Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej

$$\|f_n - g\|_{C(\Omega)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\min\{\|f_n - g\|_{K_j}, 1\}}{2^j} \to \sum_{j=1}^{\infty} 0 = 0$$

Domkniętość $H(\Omega)$ jest natychmiastową konsekwencją twierdzenia Morery (i była na ćwiczeniach: zobacz zadanie 64). □

Uwaga **107.** *Nietrudno sprawdzić, że działania liniowe: dodawanie*

$$+ : C(\Omega) \times C(\Omega) \to C(\Omega)$$

oraz mnożenie przez skalar

$$\cdot : \mathbb{C} \times C(\Omega) \to C(\Omega)$$

są ciągłe.

25 ♡ Zbieżność w L^p

Ten rozdział pomijamy!

Lemat **108.** *Jeśli $K \subset\subset \Omega$, to*

$$\forall_{n\in\mathbb{N}_0}\ \exists_{c_n<\infty}\ \forall_{f\in H(\Omega)\cap L^1(\Omega)} \quad \|f^{(n)}\|_K \le c_n\|f\|_{L^1}.$$

Dowód. Z lematu 102 istnieją zbiór $K' \subset\subset \Omega$ i stała c takie, że

$$\|f^{(n)}\|_K \le c\|f\|_{K'}.$$

Wobec tego wystarczy udowodnić twierdzenie dla $n = 0$.

Niech $R = \mathrm{dist}(K, \Omega^c)/2$, wówczas dla dowolnego $z \in K$ zachodzi $\overline{D(z, R)} \subset \Omega$, zatem z własności średniej

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{it})\,dt, \quad 0 \le r \le R.$$

Mnożąc obustronnie przez r i odcałkowując otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{R^2}{2}f(z) &= \int_0^R f(z)r\,dr\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^R\int_0^{2\pi} f(z + re^{it})\,dt\,rdr = \frac{1}{2\pi}\int_{D(z,R)} f(\zeta)\,d\zeta.\end{aligned}$$

Zatem

$$|f(z)| \le \frac{1}{\pi R^2}\int_{D(z,R)} |f(\zeta)|\,d\zeta \le \|f\|_{L^1(\Omega)}.$$

Biorąc supremum po $z \in K$ otrzymujemy tezę. □

Twierdzenie **109.** *Jeśli $f_n \in H(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, $p \ge 1$, oraz $f_n \to f$ w L^p, to istnieje $g \in H(\Omega)$ taka, że $f_n \to g$ nj. w Ω, oraz $f = g$ pw.*

Dowód. Niech $\Omega_R = \Omega \cap D(0, R)$, gdzie R jest na tyle duże, aby $K \subset \Omega_R$. Z poprzedniego lematu dla $K \subset \Omega_R$ i nierówności Höldera zachodzi

$$\|f_n - f_m\|_K \le c(K)\|f_n - f_m\|_{L^1(\Omega_R)} \le c(K)|\Omega_R|^{1/q}\|f_n - f_m\|_{L^p(\Omega)},$$

gdzie $1/p + 1/q = 1$ (argument działa też dla $p = \infty$ i $q = 1$, lub na odwrót). Zatem $\lim_{n,m\to\infty}\|f_n - f_m\|_K = 0$ dla dowolnego $K \subset\subset \Omega$. Z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej wnioskujemy, że

$$d(f_n, f_m) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\min\{\|f_n - f_m\|_{K_j}, 1\}}{2^j} \to \sum_{j=1}^{\infty} 0 = 0, \quad \text{przy } n, m \to \infty$$

(sumowalną majorantą jest ciąg $1/2^j$). Ciąg (f_n) jest więc ciągiem Cauchy'ego w $(H(\Omega), d)$, więc istnieje $g \in H(\Omega)$ taka, że $f_n \to g$ nj. w Ω.

Równość $f = g$ pw. wynika na przykład z tego, że $f_n \to g$ punktowo, oraz pewien podciąg $f_{k_n} \to f$ punktowo prawie wszędzie. □

26 Szeregi Laurenta

Dyskusja na temat odwzorowania $w \mapsto \frac{1}{w}$.

Definicja: szereg postaci

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-p)^n := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-p)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-p)^n$$

nazywany szeregiem Laurenta. Jeśli $R = (\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$ oraz $r = \limsup_{n\to-\infty} \sqrt[|n|]{|a_n|}$, to szereg ten jest zbieżny niemal jednostajnie na $A(p,r,R) := D(p,R)\setminus\overline{D(p,r)}$, o ile $r < R$. Jeśli $r = R$, to szereg może być zbieżny jedynie na $\partial D(p,r)$, a gdy $r > R$, to szereg jest wszędzie rozbieżny.

Przykład. $f(z) = \frac{1}{1-z}$ na $D(0,1)$ oraz $A(0,1,\infty)$. Stąd dostaje się rozwinięcia $f(z) + f(\frac{z}{2})$ na $D(0,1)$, $A(0,1,2)$ oraz $A(0,2,\infty)$.

Twierdzenie **110.** *(wzór Cauchy'ego) Załóżmy, że $f \in H(A(p,r,R))$, gdzie $r < R$, oraz niech $\gamma_j = p + r_j e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$ będzie dodatnio zorientowanym okręgiem o środku w p i promieniu r_j, gdzie $j = 1,2$, oraz $r < r_1 < r_2 < R$. Wówczas*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma_2} - \int_{\gamma_1}\right)\frac{f(w)\,dw}{w-z}, \quad r_1 < |z-p| < r_2.$$

Dowód. Dla ustalonych r_1, r_2 i z, zapisujemy

$$\int_{\gamma_2} - \int_{\gamma_1} = \sum_{k=1}^{n} \int_{\tilde{\gamma}_k},$$

gdzie $\tilde{\gamma}_k$ są drogami zamkniętymi o takiej własności, że istnieją zbiory gwiaździste otwarte $\Omega_k \subset \Omega$ takie, że $\tilde{\gamma}_k^* \subset \Omega_k$, ponadto $z \notin \tilde{\gamma}_k^*$ oraz $\mathrm{Ind}_{\tilde{\gamma}_k^*}(z) = \delta_{k,1}$ (rysunek). Teza wynika ze wzoru Cauchy'ego dla zbiorów gwiaździstych. □

Twierdzenie **111.** *Załóżmy, że $f \in H(A(p,r,R))$, gdzie $r < R$. Niech $\gamma = p + \rho e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$ będzie dodatnio zorientowanym okręgiem o środku w p i promieniu $\rho \in (r,R)$. Wówczas*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-p)^n, \quad z \in A(p,r,R),$$

gdzie

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}}\,dz.$$

Dowód. Z poprzedniego twierdzenia wynika, że całka definiująca a_n nie zależy od wyboru promienia $\rho \in (r,R)$.

Ustalmy $r < r_1 < r_2 < R$ i okręgi γ_1, γ_2 jak w poprzednim twierdzeniu. Dla $z \in A(p,r_1,r_2)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma_2} - \int_{\gamma_1}\right)\frac{f(w)\,dw}{w-z} =: I_2 - I_1.$$

Mamy

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)\,dw}{(w-p)-(z-p)} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)\,dw}{(z-p)(1-\frac{w-p}{z-p})}\\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{z-p}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{w-p}{z-p})^n\,dw\\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}(z-p)^{-n-1}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{(w-p)^{-n}}\,dw = -\sum_{n=-\infty}^{-1}a_n(z-p)^n.
\end{aligned}
$$

Podobnie

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(w)\,dw}{(w-p)-(z-p)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(w)\,dw}{(w-p)(1-\frac{z-p}{w-p})}\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{w-p}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z-p}{w-p})^n\,dw\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(z-p)^{n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}}\,dw = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-p)^n.
\end{aligned}
$$

W obu przypadkach poprawność zamiany kolejności całkowania i sumowania wynika łatwo z twierdzenia Fubiniego. □

Uwaga **112.** *Jeśli* $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-p)^n$ *dla* $z \in A(p,r,R)$, *to dla* $\gamma = p + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $\rho \in (r,R)$ *oraz* $k \in \mathbb{Z}$ *mamy*

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)(z-p)^k\,dz &= \int_\gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-p)^{n+k}\,dz\\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_\gamma (z-p)^{n+k}\,dz = 2\pi i\, a_{-k-1}.
\end{aligned}
$$

To oznacza, że szereg Laurenta jest wyznaczony jednoznacznie.

27 ♡ Holomorficzne przekształcenia dysku

Oznaczenia: $U = D(0,1)$, $U' = D'(0,1)$.

Lemat **113** (Schwarza)**.** *Niech* $f \in H(U)$ *spełnia* $f(0) = 0$ *i* $|f(z)| \le 1$ *dla* $z \in U$. *Wówczas* $|f(z)| \le |z|$ *dla* $z \in U$ *oraz* $|f'(0)| \le 1$. *Jeśli* $|f(z)| = |z|$ *dla pewnego* $z \in U'$ *lub* $|f'(0)| = 1$, *to* $f(z) = \lambda z$ *dla pewnej* $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$.

Dowód. Z zasady maksimum modułu. □

Uwaga **114.** *Przy założeniach lematu Schwarza, albo* f *jest izometrią dysku, albo* $|f(z)| < |z|$ *dla* $z \in U'$, *czyli* f *„ściąga punkty do 0”. Pytanie: czy istnieje funkcja* $f \in H(U)$, *która spełnia* $|f(z)| < |z|$ *dla* $z \in U'$ *oraz* $f(U) = U$*?*

Oznaczenie

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}.$$

Funkcja φ_α jest homografią, z ćwiczeń wiemy, że $\varphi_\alpha(U) = U$ i że odwzorowaniem odwrotnym jest $\varphi_{-\alpha}$.

Sprawdzamy, że

$$\varphi_\alpha(\alpha) = 0, \quad \varphi'_\alpha(0) = 1 - |\alpha|^2, \quad \varphi'_\alpha(\alpha) = \frac{1}{1 - |\alpha|^2}.$$

LEMAT **115.** *Niech $\alpha, \beta \in U$, $f \in H(U)$, $f(U) \subset U$, $f(\alpha) = \beta$. Wówczas*

$$|f'(\alpha)| \leq \frac{1 - |\beta|^2}{1 - |\alpha|^2}.$$

Ponadto równość w powyższej nierówności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $f(z) = \varphi_{-\beta}(\lambda\varphi_\alpha(z))$ dla pewnej $|\lambda| = 1$.

Dowód. Stosujemy lemat Schwarza do $g = \varphi_\beta \circ f \circ \varphi_{-\alpha}$ (jak w Rudinie). □

TWIERDZENIE **116.** *Niech $f \in H(U)$ będzie funkcją różnowartościową, $f(U) = U$. Niech $\alpha \in U$ spełnia $f(\alpha) = 0$. Wówczas istnieje λ, $|\lambda| = 1$, taka że $f = \lambda\varphi_\alpha$. (Innymi słowy, jedynymi holomorficznymi bijekcjami dysku są (pewne) homografie).*

Dowód. Jak w Rudinie. □

28 Iloczyny nieskończone

Dyskusja nt. zer funkcji holomorficznych [Rudin, 15.1].

DEFINICJA **117.** *Załóżmy, że (u_n) jest ciągiem liczb zespolonych takim, że*

$$p_n = (1 + u_1)(1 + u_2)\dots(1 + u_n)$$

i że istnieje granica $p = \lim_{n\to\infty} p_n$. Piszemy wtedy $p = \prod_{n=1}^\infty (1 + u_n)$. Mówimy, że iloczyn $\prod_{n=1}^\infty (1 + u_n)$ jest zbieżny, gdy zbieżny jest ciąg (p_n).

UWAGA **118.** *Często przyjmuje się, że iloczyn w przypadku, gdy $p = 0$, jest rozbieżny.*

LEMAT **119** (Rudin, 15.3)**.** *Jeżeli u_1, u_2, ..., $u_N \in \mathbb{C}$ oraz*

$$p_N = \prod_{n=1}^N (1 + u_n), \quad p_N^* = \prod_{n=1}^N (1 + |u_n|),$$

to

$$p_N^* \leq \exp(|u_1| + \ldots + |u_N|)$$

oraz

$$|p_N - 1| \leq p_N^* - 1. \tag{3}$$

Dowód. Dla $x \geq 0$ zachodzi $1 + x \leq e^x$, zatem

$$p_N^* = \prod_{n=1}^N (1 + |u_n|) \leq \prod_{n=1}^N e^{|u_n|} = \exp(|u_1| + \ldots + |u_N|).$$

Nierówność (3) zachodzi dla $N = 1$. Jeśli dla pewnego $N \geq 1$ zachodzi (3), to

$$\begin{aligned}|p_{N+1} - 1| &= |(p_N - 1 + 1)(1 + u_{N+1}) - 1| = |(p_N - 1)(1 + u_{N+1}) + u_{N+1}| \\ &\leq |p_N - 1|(1 + |u_{N+1}|) + |u_{N+1}| \leq (p_N^* - 1)(1 + |u_{N+1}|) + |u_{N+1}| \\ &= p_N^*(1 + |u_{N+1}|) - 1 = p_{N+1}^* - 1.\end{aligned}$$

□

Twierdzenie **120** (Rudin, 15.4). *Załóżmy, że $\{u_n\}$ jest ciągiem ograniczonych funkcji zespolonych na zbiorze S takich, że szereg $\sum |u_n(s)|$ jest zbieżny jednostajnie na S. Wówczas iloczyn*

$$f(s) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + u_n(s))$$

jest zbieżny jednostajnie na S i $f(s_0) = 0$ dla pewnego $s_0 \in S$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u_n(s_0) = -1$ dla pewnego n.

Dowód. Z założeń wynika, że szereg $\sum |u_n(s)|$ jest ograniczony na zbiorze S. Niech $p_N = \prod_{n=1}^{N}(1 + u_n(s))$, z poprzedniego lematu [15.3] wnioskujemy, że istnieje stała $C = \exp(\sum |u_n(s)|) < \infty$ taka, że dla wszystkich N i wszystkich s mamy $|p_N(s)| \leq C$.

Mamy dla dowolnych $s \in S$ i $N > M$

$$\begin{aligned} |p_N(s) - p_M(s)| &= |p_M(s)| \cdot |\prod_{n=M+1}^{N}(1 + u_n(s)) - 1| \\ &\leq |p_M(s)|(\exp(\sum_{n=M+1}^{N}|u_n(s)|) - 1) \qquad (4) \\ &\leq C(\exp(\sum_{n=M+1}^{N}|u_n(s)|) - 1). \end{aligned}$$

Stąd i ze zbieżności jednostajnej szeregu $\sum |u_n(s)|$ wynika, że ciąg $\{p_N\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $(C(S), \|\cdot\|_S)$, jest więc zbieżny jednostajnie do pewnej funkcji f.

Załóżmy, że $f(s_0) = 0$. Niech M będzie na tyle duże, by

$$\exp(\sum_{n=M+1}^{\infty}|u_n(s_0)|) - 1 < 1/2.$$

Wówczas z nierówności (4) wynika, że dla $N > M$

$$|p_N(s_0) - p_M(s_0)| \leq |p_M(s_0)|/2,$$

skąd z nierówności trójkąta

$$|p_N(s_0)| \geq |p_M(s_0)| - |p_N(s_0) - p_M(s_0)| \geq |p_M(s_0)|/2.$$

Po przejściu z $N \to \infty$ otrzymujemy, że $0 = |f(s_0)| \geq |p_M(s_0)|/2$, zatem $u_n(s_0) = 0$ dla jakiegoś $n \in \{1, 2, \ldots, M\}$. □

Wniosek **121.** *Jeśli $u_n \in H(\Omega)$ są takie, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ jest zbieżny niemal jednostajnie na Ω, to iloczyn*

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + u_n(z)), \quad z \in \Omega$$

jest zbieżny niemal jednostajnie na Ω, $f \in H(\Omega)$ oraz $f(z_0) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u_n(z_0) = -1$ dla pewnego n.

Twierdzenie 122. *(Leja, str. 200) Niech $u_n \in H(\Omega)$ będą takie, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ jest zbieżny niemal jednostajnie na Ω i niech*

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(z)), \quad z \in \Omega.$$

Dla $z \in \Omega$ takich, że $f(z) \neq 0$ zachodzi wzór

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n'(z)}{1 + u_n(z)},$$

przy czym szereg po prawej jest zbieżny niemal jednostajnie na $\Omega \setminus f^{-1}(\{0\})$.

Dowód. Niech $f_N = \prod_{n=1}^{N}(1 + u_n(z))$. Jeśli $f_N(z) \neq 0$, to

$$\frac{f_N'(z)}{f_N(z)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{u_n'(z)}{1 + u_n(z)}. \tag{5}$$

Ponieważ $f_N \to f$ nj. w Ω, więc również $f_N' \to f'$ nj. w Ω. Niech $K \subset\subset \Omega \setminus f^{-1}(\{0\})$, wówczas $|f| \geq \varepsilon$ na K, a ponieważ $f_N \rightrightarrows f$ na K, to również $|f_N| \geq \varepsilon/2$ na K dla dużych N. Zatem lewa strona (5) zbiega jednostajnie na K do $\frac{f'(z)}{f(z)}$. Stąd teza. □

Lemat 123. *Jeśli $f \in H(\mathbb{C})$ nie ma zer, to istnieje $h \in H(\mathbb{C})$ taka, że $f = \exp h$.*

Dowód. Niech g będzie funkcją pierwotną funkcji f'/f. Wówczas

$$(fe^{-g})' = f'e^{-g} + fe^{-g} \cdot (-\frac{f'}{f}) = 0,$$

zatem $fe^{-g} = c$, gdzie $c \neq 0$ jest stałą. Jeśli $c = \exp(C)$, to $f = \exp Cg$, czyli można wziąć $h = Cg$. □

Przykład 124. *Rozkład funkcji* $\sin \pi z$. *(Leja, str. 205–206). Niech $g(z) = z\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{z^2}{n^2})$. Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2}$ jest zbieżny niemal jednostajnie na $\mathbb{C}$, więc g jest dobrze określona i całkowita, ponadto ma pierwiastki tylko w punktach $\mathbb{Z}$. Pierwiastki te są jednokrotne, co widać wyłączając czynnik $(1 - \frac{z^2}{n_0^2})$ przed iloczyn nieskończony.*

Zatem funkcja $\frac{\sin \pi z}{g(z)}$ ma tylko osobliwości pozorne, rozszerza się więc do funkcji całkowitej, która nie ma zer. Wobec tego z lematu

$$\sin \pi z = e^{h(z)} g(z) = e^{h(z)} z \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{z^2}{n^2}).$$

Stosując wzór z twierdzenia, dla $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{(\sin \pi z)'}{\sin \pi z} &= h'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2z/n^2}{1 - \frac{z^2}{n^2}} \\ &= h'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right),\end{aligned}$$

przy czym (z twierdzenia) szereg po prawej jest zbieżny niemal jednostajnie na $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Szereg funkcji holomorficznych niemal jednostajnie zbieżny można różniczkować wyraz po wyrazie, więc

$$\begin{aligned}
-\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} &= (\pi \operatorname{ctg} \pi z)' = \\
&= h''(z) - \frac{1}{z^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z-n)^2} + \frac{1}{(z+n)^2} \right),
\end{aligned}$$

skąd

$$h''(z) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} \right) - \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}. \qquad (6)$$

Stąd $h''(z+1) = h''(z)$ dla $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, czyli z twierdzenia o zerach h'' jest (całkowitą) funkcją 1-okresową. Wobec tego $h(\mathbb{C}) = h(\{z : 0 \le \operatorname{Re} z \le 1\})$.

Jeśli $z = x + iy$, gdzie $x \in [0,1]$ i $|y| \ge 1$, to

$$\left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} \right| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-n)^2 + y^2} \le 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + y^2} \le 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1},$$

ponadto

$$\begin{aligned}
|\sin \pi z|^2 = \frac{|e^{\pi z i} - e^{-\pi z i}|^2}{4} &= \frac{|(e^{-\pi y} - e^{\pi y}) \cos \pi x + i(e^{-\pi y} + e^{\pi y}) \sin \pi x|^2}{4} \\
&= \frac{e^{2\pi y} + e^{-2\pi y} - 2\cos 2\pi x}{4} > \frac{e^{2\pi |y|}}{4}.
\end{aligned}$$

Zatem funkcja po prawej stronie równości (6) jest ograniczona na $\{z : 0 \le \operatorname{Re} z \le 1, |\operatorname{Im} z| \ge 1\}$, z ciągłości jest ograniczona na całym pasie $\{z : 0 \le \operatorname{Re} z \le 1\}$, a z 1-okresowości na $\mathbb{C}$. Z twierdzenia Liouville'a h'' jest stała. Ponieważ przy $y \to \infty$ i $x \in [0,1]$ mamy $h''(x+yi) \to 0$, więc $h'' = 0$.

Zatem h' jest stała, z nieparzystości obu stron wzoru na $\pi \operatorname{ctg} \pi z$ wynika, że $h' = 0$. Stąd h jest stała, przechodząc do granicy $z \to 0$ w równości

$$\frac{\sin \pi z}{z} = e^{h(z)} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2})$$

otrzymujemy, że $h(z) = \ln \pi$. Podsumowując,

$$\begin{aligned}
\sin \pi z &= \pi z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2}), \quad z \in \mathbb{C} \\
\pi \operatorname{ctg} \pi z &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \\
\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

DEFINICJA **125.** *(Czynniki pierwsze Weierstrassa) Niech $E_0(z) = 1 - z$ oraz $E_p(z) = (1-z)\exp(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p})$ dla $p = 1, 2, \ldots$.*

Jedynym zerem E_p jest $z = 1$, E_p są całkowite, ponadto zachodzi następujący lemat.

Lemat **126.** *(Rudin, Lemat 15.8) Dla $|z| \leq 1$ i $p = 0, 1, \ldots$ zachodzi*

$$|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}.$$

Dowód. Dla $p = 0$ jest to oczywiste. Dla $p \geq 1$

$$\begin{aligned}E_p'(z) &= -\exp(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}) + (1-z)\exp(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p})(1 + z + \ldots + z^{p-1}) \\ &= -z^p \exp(z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^p}{p}) = -z^p e^z e^{z^2/2} \ldots e^{z^p/p}.\end{aligned}$$

Wobec tego w rozwinięciu Maclaurina funkcji $-E_p'$ wszystkie współczynniki są nieujemne (bo to rozwinięcie można dostać jako iloczyn Cauchy'ego rozwinięć o nieujemnych współczynnikach). Ponadto $z = 0$ jest p-krotnym zerem E_p'. Wobec tego $1 - E_p$ ma $(p+1)$-krotne zero w $z = 0$ i wszystkie współczynniki w rozwinięciu Maclaurina nieujemne, czyli

$$\frac{1 - E_p(z)}{z^{p+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

gdzie $a_n \geq 0$. Zatem dla $|z| \leq 1$,

$$\left| \frac{1 - E_p(z)}{z^{p+1}} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n |z|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1 - E_p(1)}{1^{p+1}} = 1. \qquad \square$$