74 $f \in H(\mathbb{C})$

$\operatorname{Re} f \leq M$

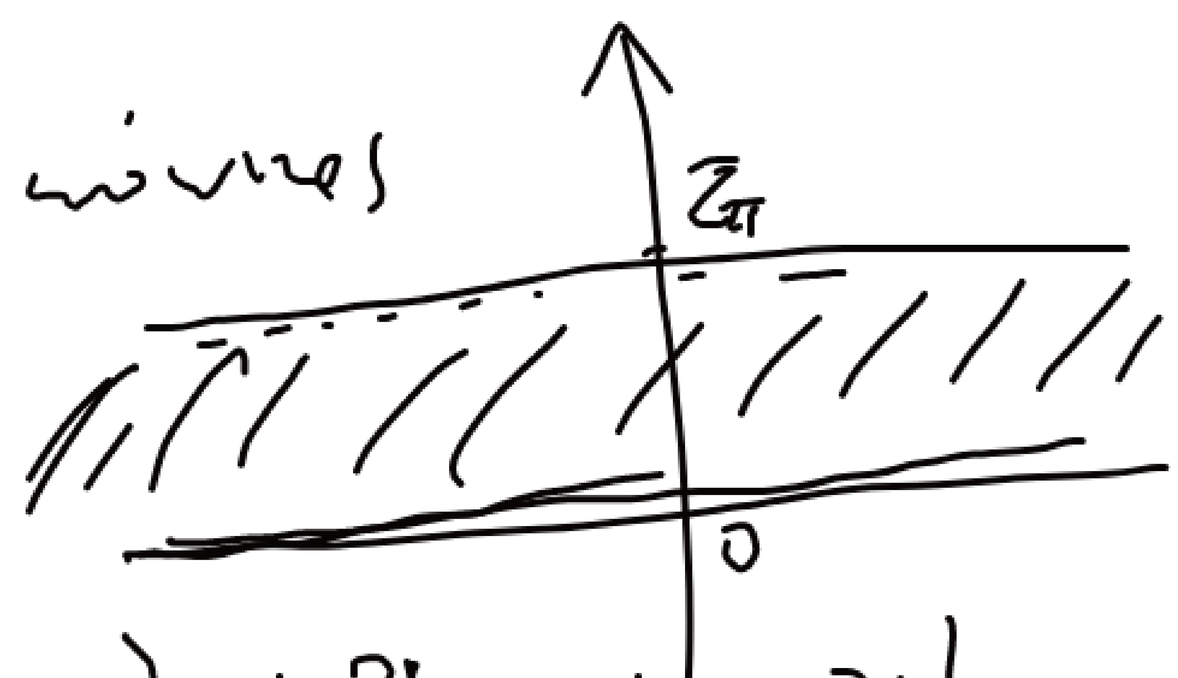
$$|e^z| = |e^{x+iy}| = e^x = e^{\operatorname{Re} z}$$
$(z = x+iy)$

$$|e^f| = e^{\operatorname{Re} f} \leq e^M$$

czyli $e^f \in H(\mathbb{C})$ i ograniczona, więc z tw. Liouville'a jest stała

$e^f = c$

jeśli dla jakiegoś $a \in \mathbb{C}$ zachodzi $e^a = c$, to mamy również



$\forall_{z \in \mathbb{C}} \exists_{k \in \mathbb{Z}} f(z) = a + 2k\pi i$ ~~dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$~~

ponieważ f jest ciągła, więc $f(\mathbb{C})$ jest $\underbrace{\text{spójny}}$ i $f(\mathbb{C}) \subset \underbrace{\{a + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}}$

Zatem f jest stała

Np. jeśli $\operatorname{Im} f \geq M$

$$\operatorname{Re}(if) = -\operatorname{Im} f \leq -M$$

$$|e^{if}| \leq e^{-M}$$

wsk. do wszystkich części:

$e^f, e^{-f}, e^{if}, e^{-if}$