91 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-p)^n$ $\quad z\in A(p,0,r) = D'(p,r)$

a) f ma w p osobliwość pozorną $\iff 0=a_{-1}=a_{-2}=\dots$

b) biegun rzędu $m\in\mathbb{N}$ $\iff a_{-m}\neq 0,\ 0=a_{-m-1}=a_{-m-2}=\dots$

c) osobliwość istotną $\iff$ dla nieskończenie wielu $n\in\{-1,-2,\dots\}$ zachodzi $a_n\neq 0$.

---

a) $\Leftarrow$ jasne (mamy szereg Taylora), $\lim_{z\to p}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-p)^n = a_0$

$\Rightarrow$ f rozszerza się do f. hol na $D(p,r)$, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-p)^n$, $z\in D(p,r)$

z jednoznaczności rozwinięcia w szereg L.

$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-p)^n$, —||—

$a_n=c_n=0$ dla $n<0$

$c_n=\begin{cases}0, & n=-1,-2,\dots\\ b_n, & n=0,1,\dots\end{cases}$

b) $\Leftarrow$ jasne $\Rightarrow$ podobnie jw.