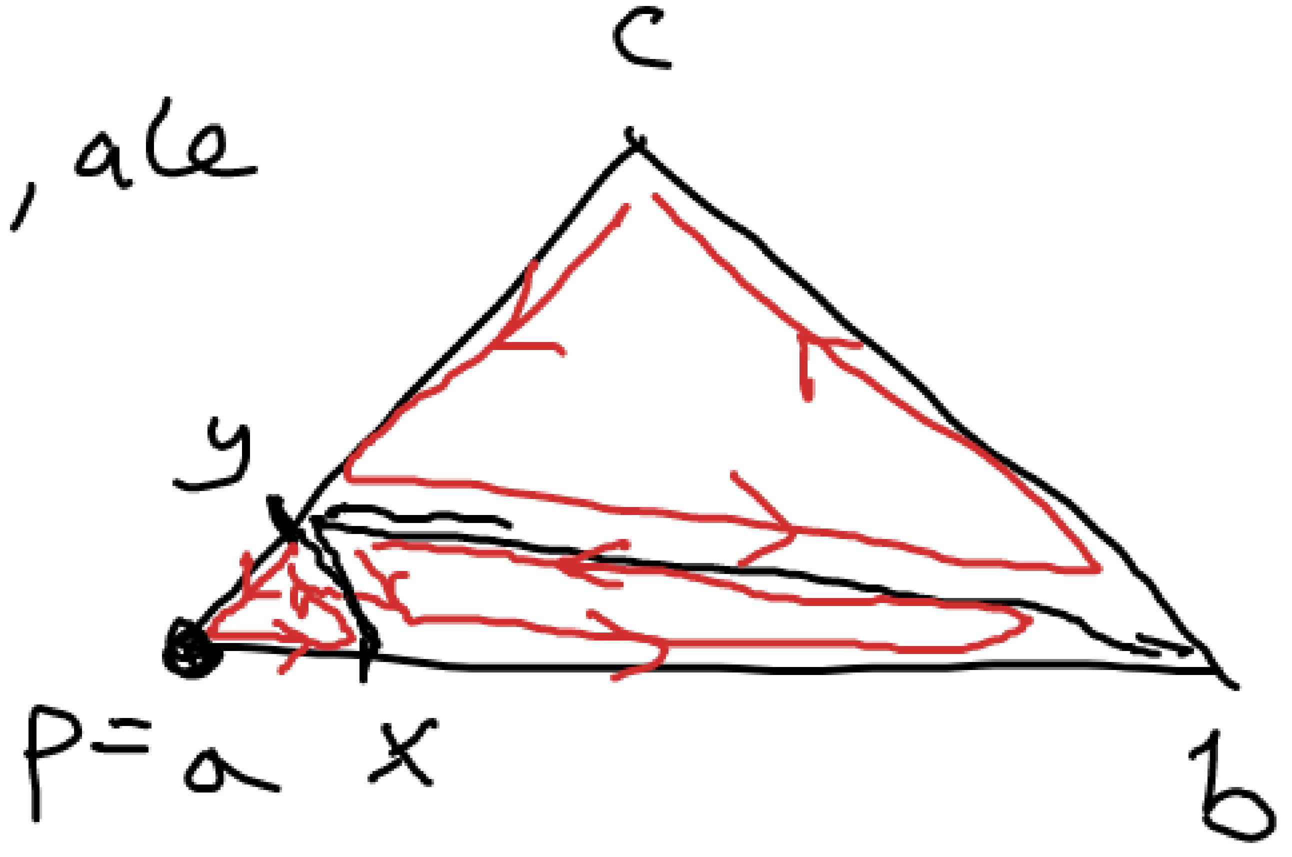
Załóżmy teraz, że p jest wierzchołkiem Δ, np. $p=a$.
Wybieramy $\underline{x} \in \langle a,b\rangle^*$, $\underline{y} \in \langle a,c\rangle^*$ blisko a, ale $x \neq a$, $y \neq a$.



$$\underline{\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz} = \left(\int_{\partial\Delta(a,x,y)} + \int_{\partial\Delta(b,y,x)} + \int_{\partial\Delta(b,c,y)} \right) f(z)\,dz =$$

$\{ \langle a,x\rangle + \langle x,b\rangle = \langle a,b\rangle$

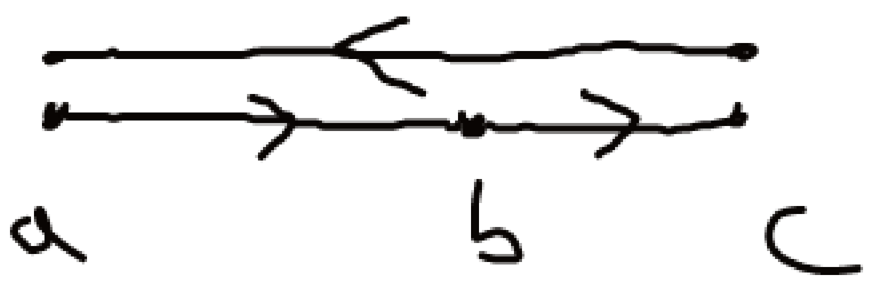
$$= \int_{\partial\Delta(a,x,y)} f(z)\,dz + 0 + 0$$

Ponieważ f jest ogr. na Δ, a $\ell(\partial\Delta(a,x,y))$ możemy uczynić dowolnie małą, więc $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.

drugość

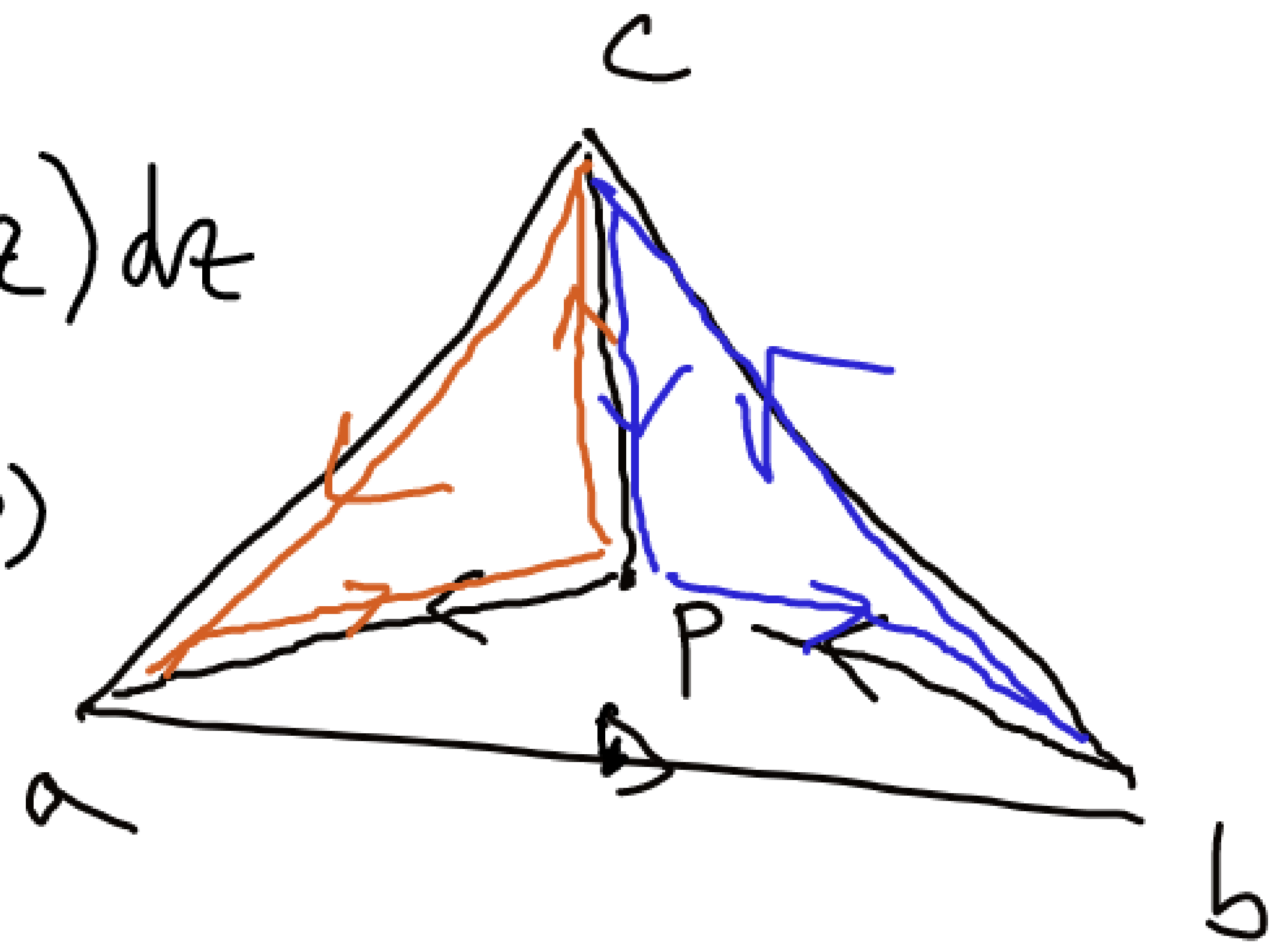
Ostatni przypadek: $p \in \Delta$, ale nie jest wierzchołkiem.

→ 1) a, b, c są współliniowe $\longrightarrow \displaystyle\int_{\partial\Delta(a,b,c)} f(z)\,dz = 0$



2) w przeciwnym razie

$$\int_{\partial\Delta(a,b,c)} f(z)\,dz = \left(\int_{\partial\Delta(a,b,p)} + \int_{\partial\Delta(b,c,p)} + \int_{\partial\Delta(c,a,p)}\right) f(z)\,dz$$



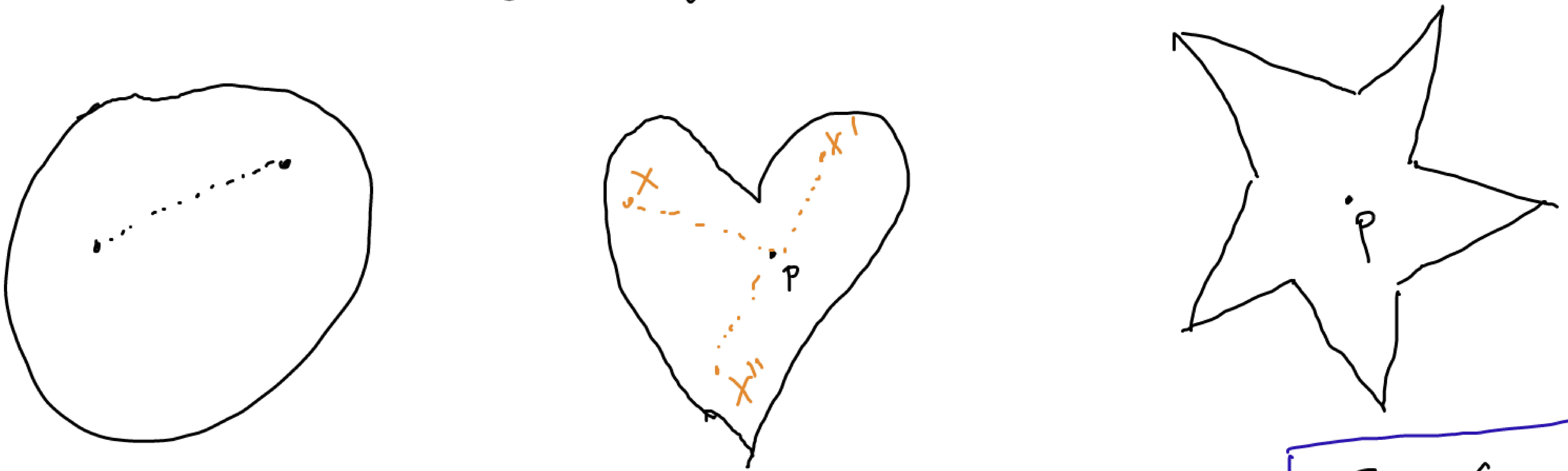
$$= 0.$$

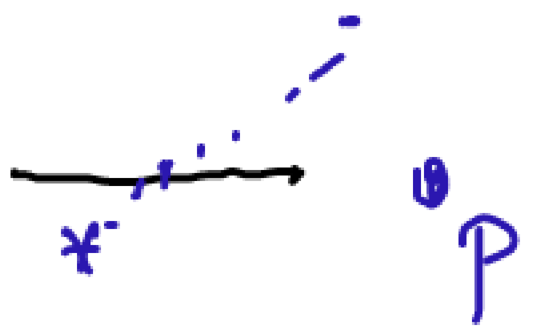
$\boxtimes$

Def. Zbiór $E \subset \mathbb{C}$ nazywamy gwiaździstym względem $p \in E$,

jeśli $$\forall_{x \in E} \quad \langle p, x \rangle^* \subset E .$$

Mówimy, że $E \subset \mathbb{C}$ jest gwiaździsty, jeśli istnieje $p \in E$, wzgl. którego E jest gwiaździsty.



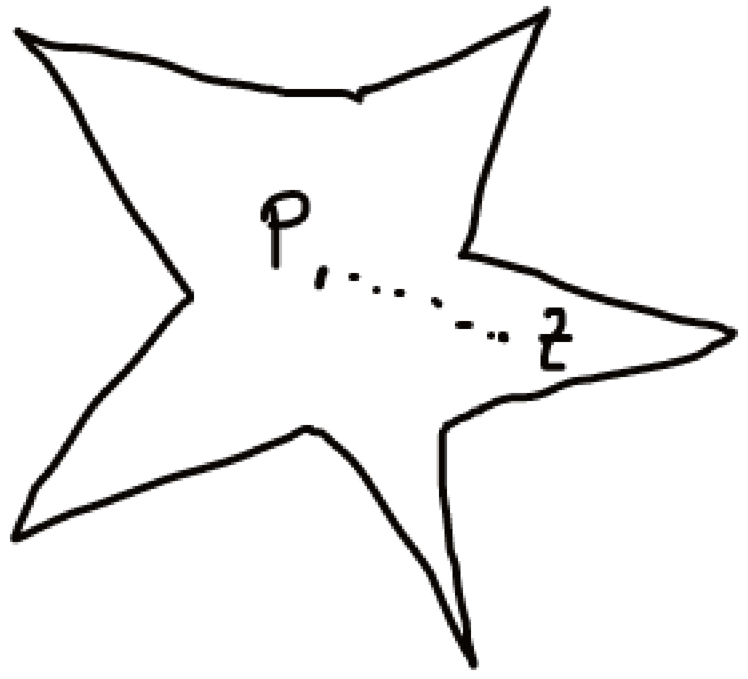


przykłady zbiorów gwiaździstych $\quad \boxed{\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]}$

Tw. (Cauchy'ego dla zb. gwiaździstych i tw. o funkcji pierwotnej)

Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ – otwarty gwiaździsty, $p \in \Omega$. Niech $f \in H(\Omega \setminus \{p\}) \cap C(\Omega)$. Wówczas istnieje $F \in H(\Omega)$ taka, że $F' = f$ na Ω. W szczególności $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ dla dow. drogi zamkniętej γ w Ω.

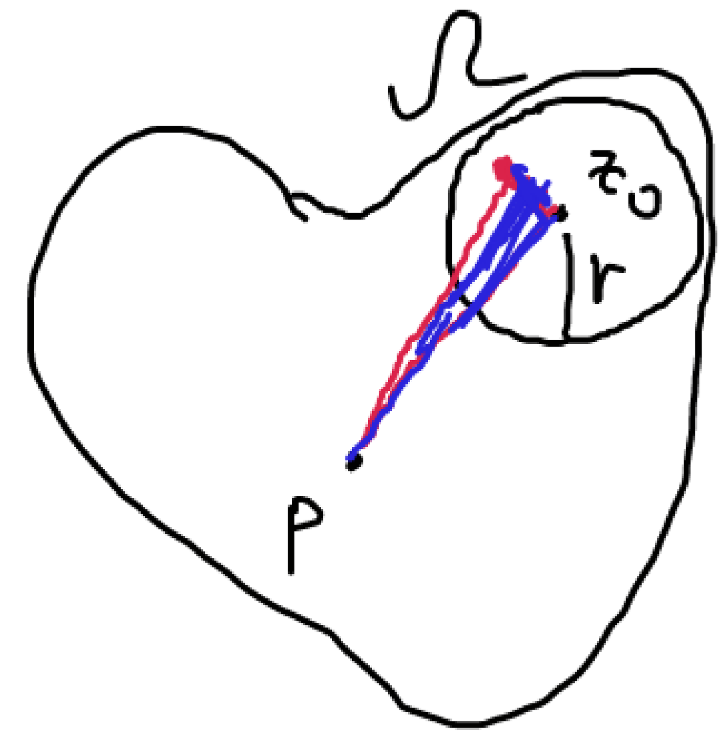
D-d. Ustalmy punkt $p \in \Omega$, wzgl. którego Ω jest gwiaździsty. Wówczas dla dowolnego $z \in \Omega$ odcinek $\langle p, z\rangle^*$ jest zawarty w Ω. Możemy więc zdefiniować



$$F(z) = \int_{\langle p, z\rangle} f(w)\,dw \qquad (z \in \Omega).$$

Ustalmy $z_0 \in \Omega$ i $r>0$ takie, by $D(z_0,r)\subset\Omega$

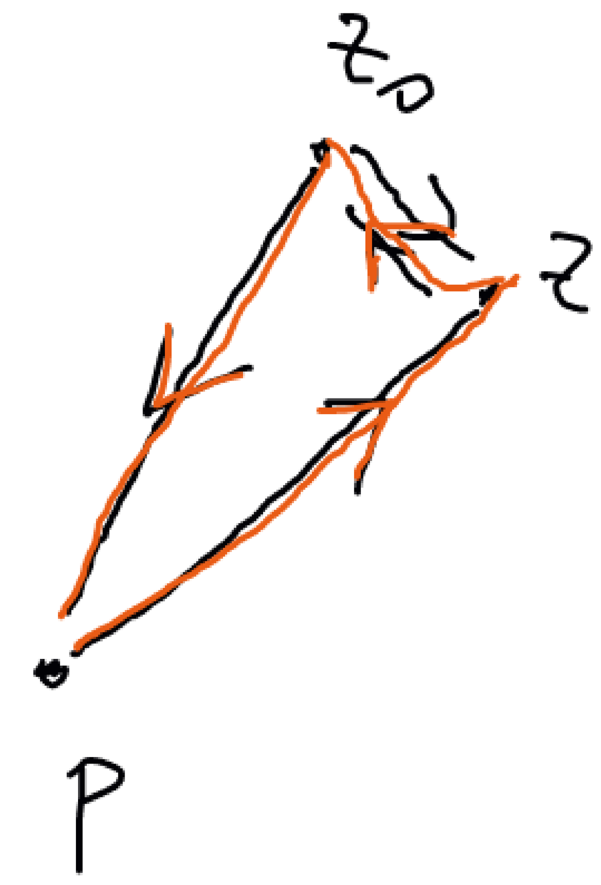
Dla $z \in D(z_0, r)$ trójkąt $\Delta(p, z_0, z) \subset \Omega$



Z poprzedniego twierdzenia wynika, że

$$F(z)-F(z_0) = \left(\int_{\langle p,z\rangle} - \int_{\langle p,z_0\rangle}\right) f(w)\,dw =$$

$$= \left(\int_{\partial\Delta(z_0,p,z)} + \int_{\langle z_0,z\rangle}\right) f(w)\,dw = \int_{\langle z_0,z\rangle} f(w)\,dw$$



Zauważmy, że $\int_{\langle z_0,z\rangle} 1\,dw = z - z_0$, więc $\int_{\langle z_0,z\rangle} f(z_0)\,dw = (z-z_0)f(z_0)$.

Zatem

$$\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z-z_0}\int_{\langle z_0,z\rangle} \big(f(w)-f(z_0)\big)\,dw,$$

o ile $z \in D(z_0,r)\setminus\{z_0\} =: D'(z_0,r)$. Z cg. f wynika, że dla dow. $\varepsilon>0$ istnieje $\delta\in(0,r)$ taka, że

$$|f(w)-f(z_0)| < \varepsilon, \quad \text{gdy} \quad |w-z_0|<\delta.$$

stąd dla $z\in D'(z_0,\delta)$

$$\left|\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} - f(z_0)\right| \le \frac{1}{|z-z_0|}\,\ell(\langle z_0,z\rangle)\cdot\varepsilon = \varepsilon.$$

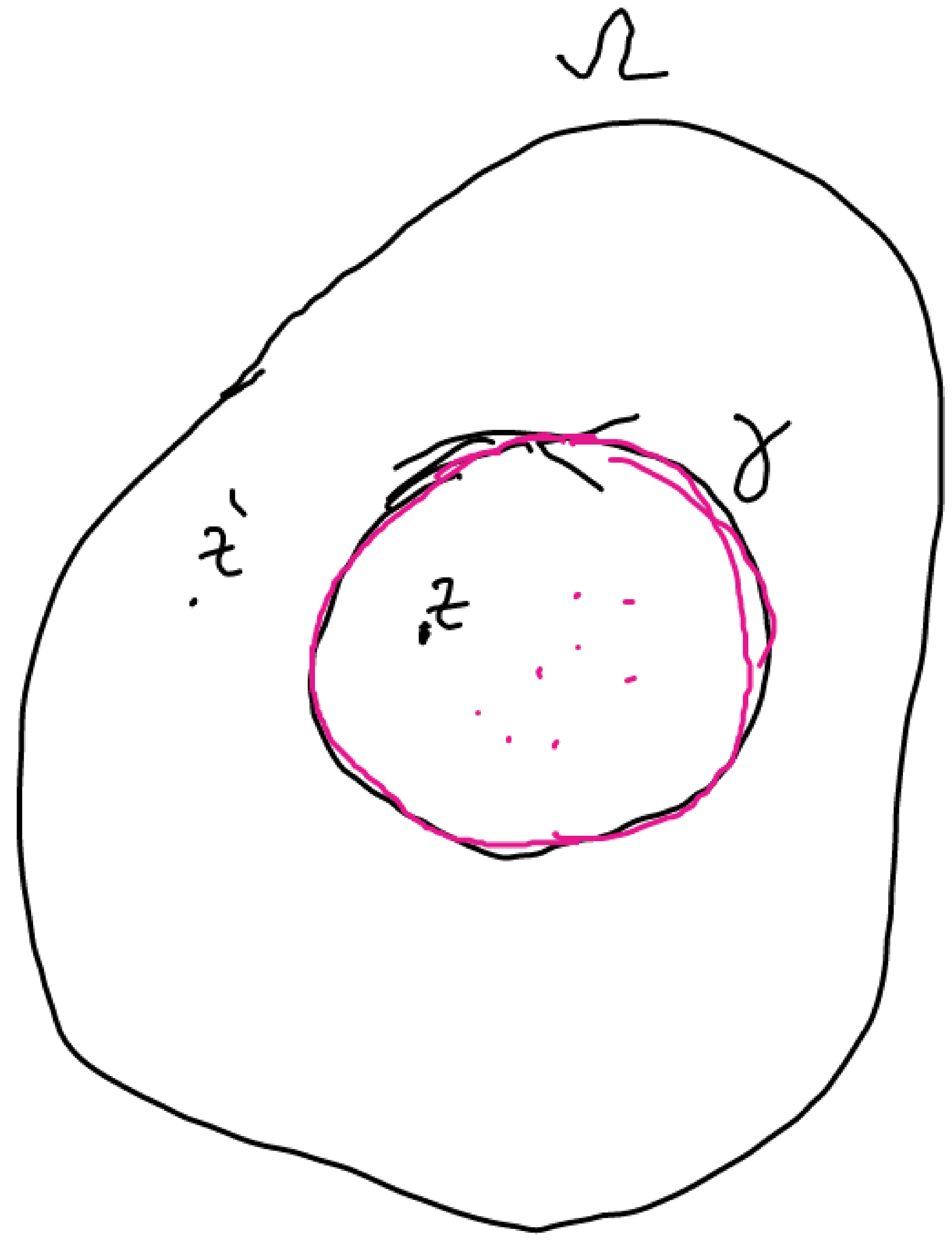
To oznacza $F'(z_0)=f(z_0)$.

Zatem $F\in H(\Omega)$, wtedy $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ z zadania na ćwiczeniach. ⊠

Tw. (wzór Cauchy'ego)

$\Omega \subset \mathbb{C}$ otwarty, gwiaździsty, γ - droga zamknięta w Ω, $z \in \Omega \setminus \gamma^*$. Wówczas dla $f \in H(\Omega)$ mamy

$$f(z)\,\underbrace{\mathrm{Ind}_\gamma(z)}_{=1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw.$$



D-d.

Ustalmy $z \in \Omega \setminus \gamma^*$ i przyjmijmy

$$g(w) = \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z}, & w \in \Omega \setminus \{z\} \\ f'(z), & w = z \end{cases}$$

Wówczas $g \in H(\Omega \setminus \{z\}) \cap C(\Omega)$, więc z tw. Cauchy'ego dla zb. gwiaździstych

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(w)\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{w-z}\,dw$$

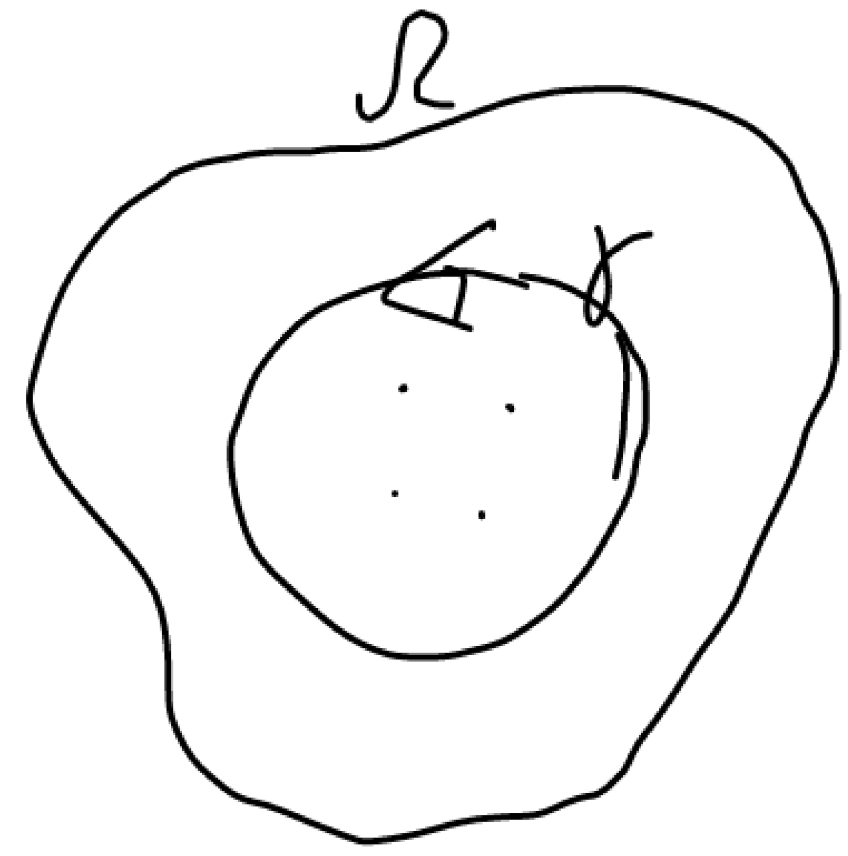
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw - f(z)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z).$$

∎

Wniosek. $\Omega \subset \mathbb{C}$ gwiaździsty, otwarty i γ - droga zamknięta w Ω, $p \in \Omega \setminus \gamma^*$. Wówczas dla $f \in H(\Omega)$ zachodzi

$$(f \cdot \mathrm{Ind}_\gamma)^{(n)}(p) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}}\, dw \qquad (n = 0, 1, \dots).$$

D-d. Niech $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$. Wtedy



$$g(p) := f(p)\, \mathrm{Ind}_\gamma(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-p}\, dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha^\beta \frac{f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)}{\gamma(t) - p}\, dt$$

Z jednego z poprzednich twierdzeń g rozwija się w szereg potęgowy oraz

$$g^{(n)}(p) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\alpha^\beta \frac{f(\gamma(t))\, \gamma'(t)}{(\gamma(t) - p)^{n+1}}\, dt = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)\, dw}{(w-p)^{n+1}}$$

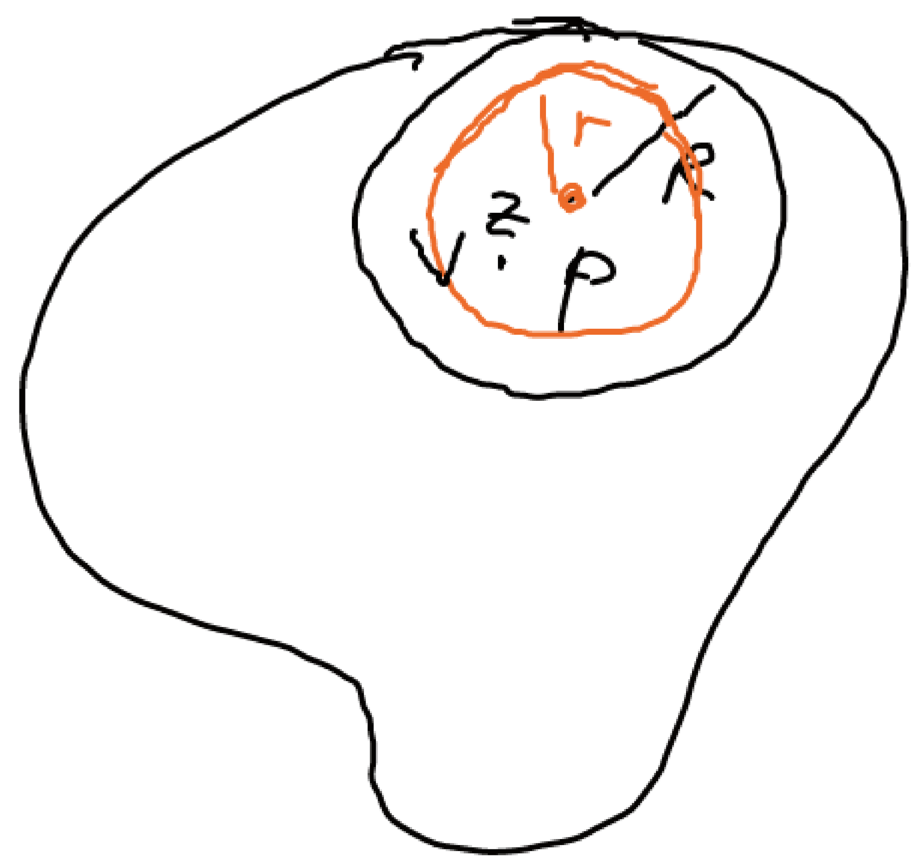
$\boxtimes$

Tw. 63

Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ – otwarty (dowolny), $f \in H(\Omega)$.
Wówczas dla każdego $p \in \Omega$ funkcja f jest rozwijalna w szereg potęgowy o środku w p, szereg ten jest zbieżny na każdym dysku $D(p,R) \subset \Omega$, ponadto

$$f^{(n)}(p) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(p+re^{it})\, e^{-int}\, dt,$$

jeśli $\overline{D(p,r)} \subset \Omega$



Dd. Niech $D(p,R) \subset \Omega$, $0 < r < R$.
Niech $\gamma(t) = p + re^{it}$, $t \in [0,2\pi]$
Ze wzoru Cauchy'ego dla $D(p,R)$ (– wypukły, więc gwiaździsty)

$$f(z) = f(z)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \qquad (z \in D(p,r))$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,dt$$

$C|_{\gamma^*}$

z jednego z poprz. twierdzeń f rozwija się w szereg potęgowy zbieżny na $D(p,r)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(r)} (z-p)^n, \quad z \in D(p\ \ )$$

Z jednoznaczności rozwinięcia $a_n^{(r)}$ nie zależą od r, więc szereg jest zb. na $D(p,R)$.

$$f^{(n)}(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{(\gamma(t)-p)^{n+1}}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(p+re^{it})\, ire^{it}}{(\cancel{p}+re^{it}-\cancel{p})^{n+1}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\frac{ir}{r^{n+1}}\int_0^{2\pi} f(p+re^{it})\,\cancel{e^{it}}\, e^{it(-n-\cancel{1})}\,dt = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(p+re^{it})\,e^{-int}\,dt$$

$\boxtimes$

Wniosek $f \in H(\Omega \setminus \{p\}) \cap C(\Omega) \Longrightarrow \underline{f \in H(\Omega)}$

($\Omega \subset \mathbb{C}$ otwarty) ($p \in \Omega$)

Dd.

Niech $D(p,r) \subset \Omega$.

$D(p,r)$ jest wypukły, więc gwiaździsty, zatem

z tw. o funkcji pierwotnej istnieje

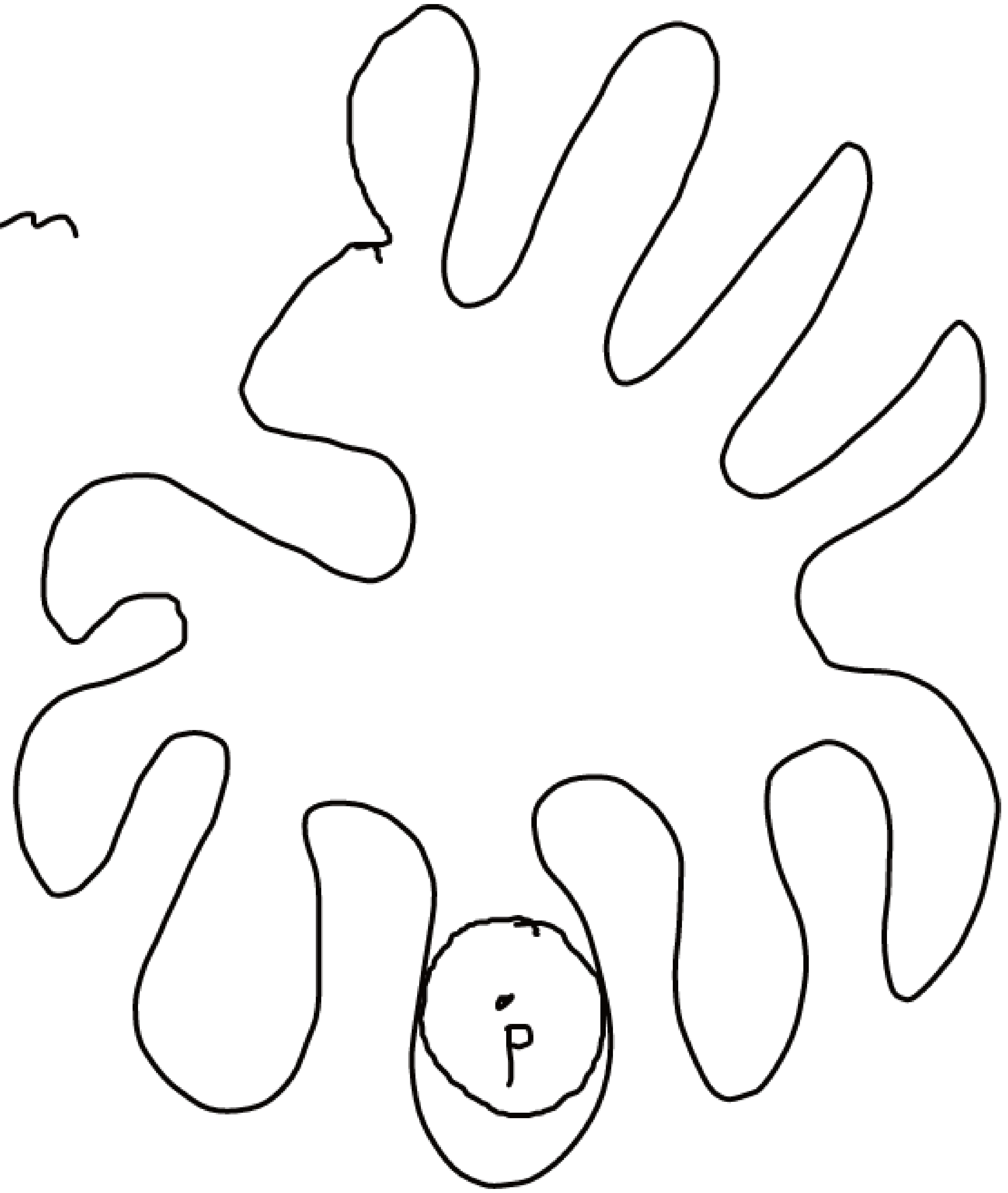
$F \in H(D(p,r))$: $F' = f$ na $D(p,r)$

Z poprz. twierdzenia wynika, że F'' istnieje,

ale $F'' = (F')' = f'$ na $D(p,r)$,

w szczególności $f'(p)$ istnieje.

$\boxtimes$

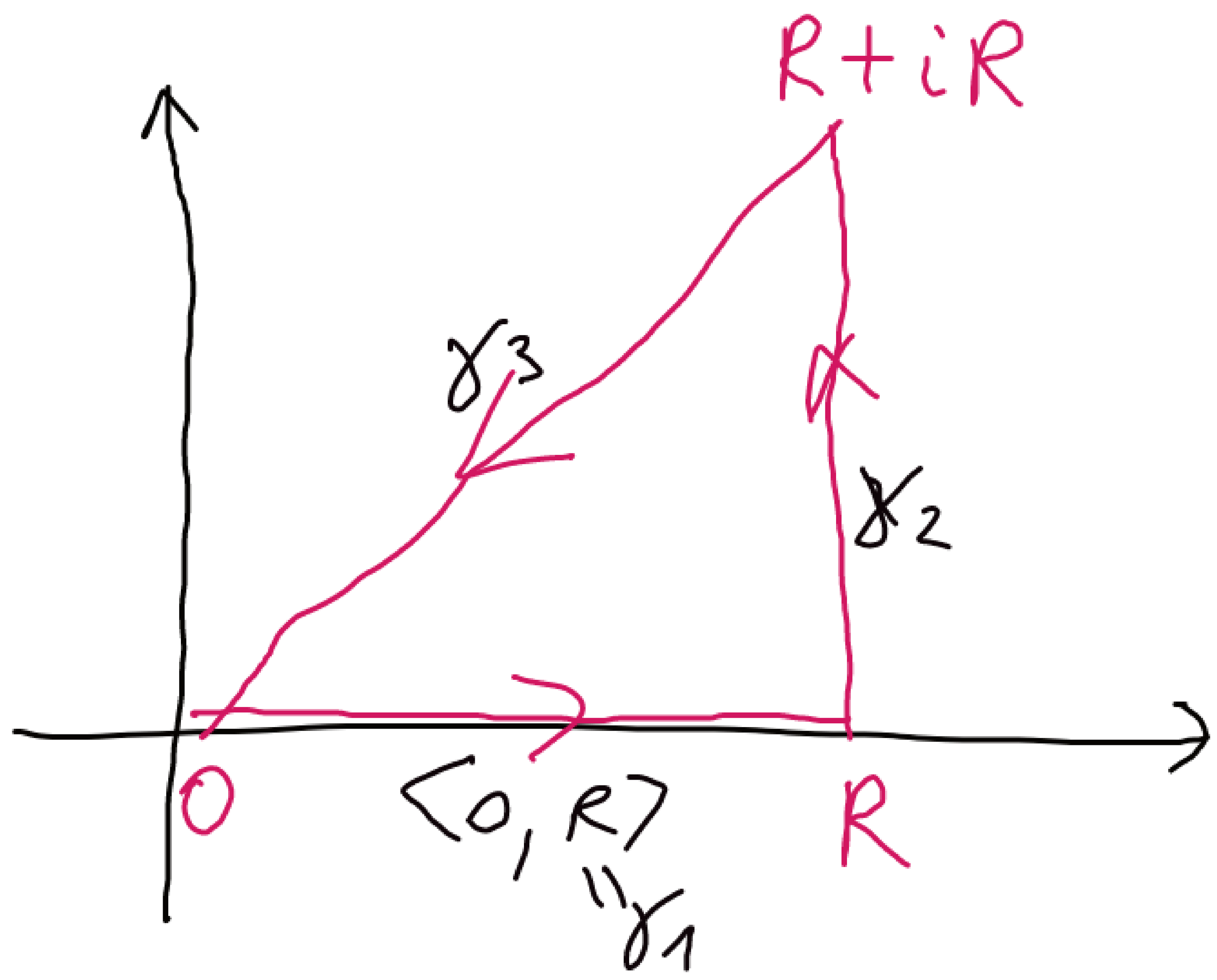


Przykład

$$f(z) = e^{iz^2}, \quad f \in H(\mathbb{C})$$

Z tw. Cauchy'ego

$$\int_{\partial\Delta} f(z) = 0$$



Z drugiej strony

· $$\int_{\langle 0,R\rangle} f(w)\,dw = \int_0^R e^{it^2}\,dt = \int_0^R \left(\cos(t^2) + i\sin(t^2)\right) dt$$

· $\langle R, R+iR\rangle = \gamma_2$, $\gamma_2(t) = R+it$, $t \in [0,R]$

$$\left|\int_{\gamma_2} f(w)\,dw\right| = \left|\int_0^R e^{i(R+it)^2}\cdot i\,dt\right| = \left|\int_0^R \exp\left(i(R^2-t^2)-2Rt\right)dt\right|$$

$$\le \int_0^R \underbrace{\left|\exp\left(i(R^2-t^2)\right)\right|}_{=1}\cdot e^{-2Rt}\,dt = \int_0^R e^{-2Rt}\,dt =$$

$$= \frac{e^{-2Rt}}{-2R}\Bigg|_{t=0}^{t=R} = \frac{e^{-2R^2}-1}{-2R} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$