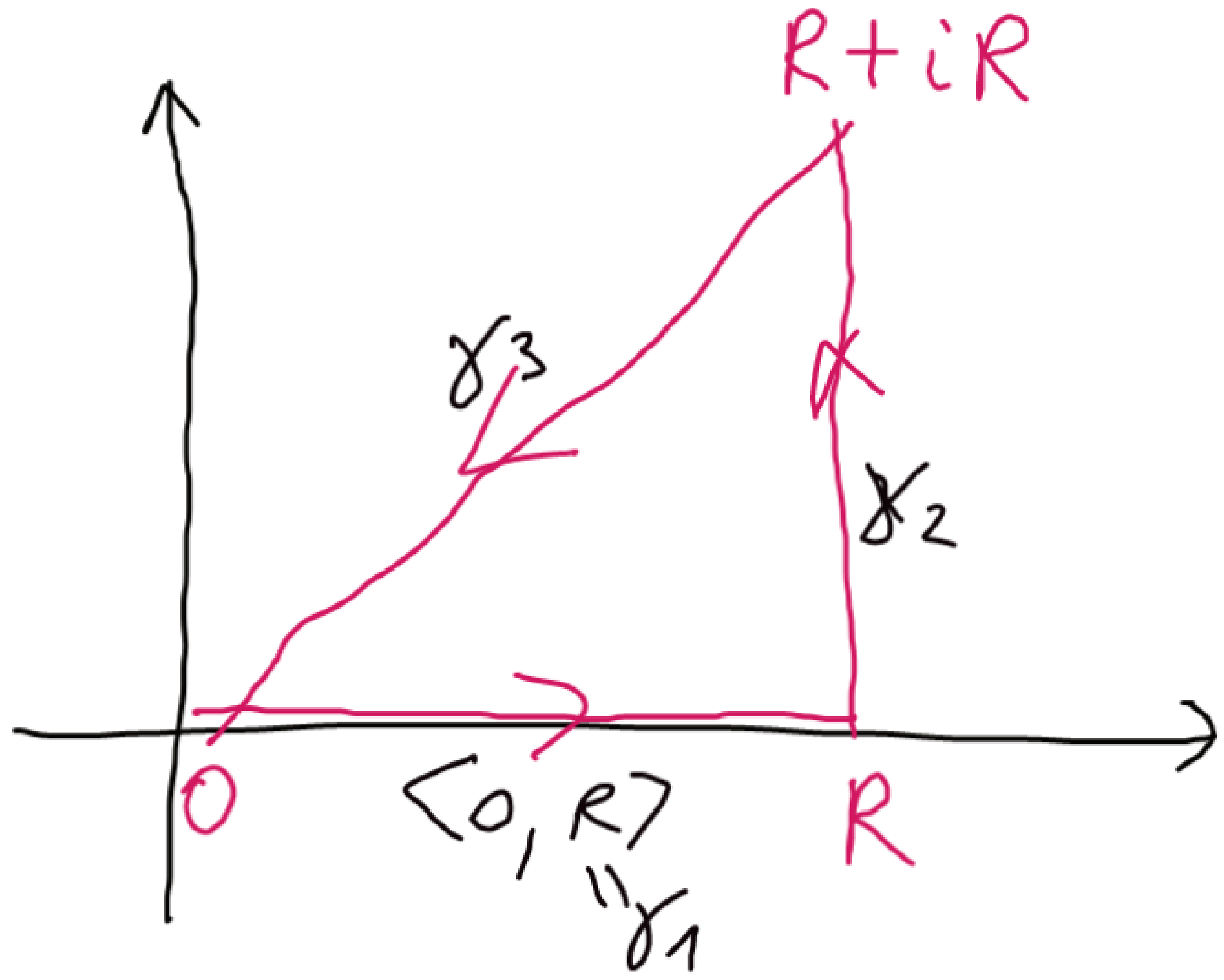
Przykład

$$f(z) = e^{iz^2}, \quad f \in H(\mathbb{C})$$



Z tw. Cauchy'ego

$$\int_{\partial\Delta} f(z) = 0$$

Z drugiej strony

· $$\int_{\langle 0,R\rangle} f(w)\,dw = \int_0^R e^{it^2}\,dt = \int_0^R \left(\cos(t^2) + i\sin(t^2)\right) dt$$

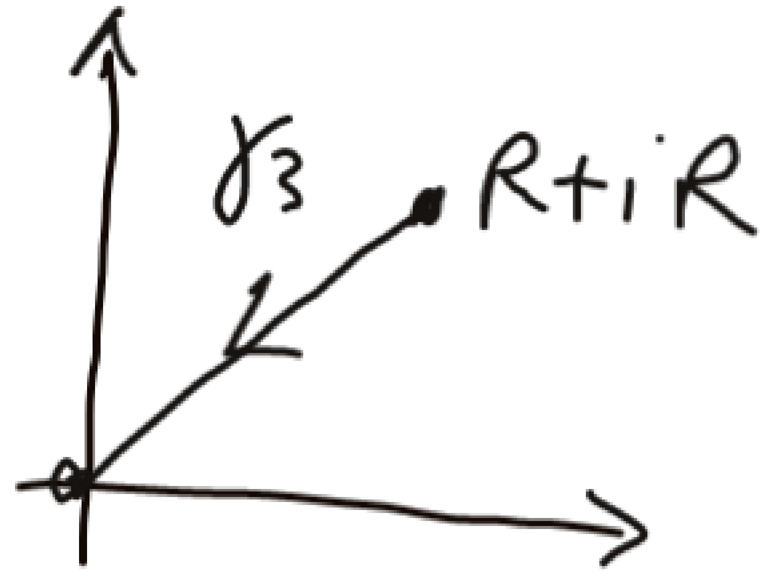
· $\langle R, R+iR\rangle = \gamma_2$, $\gamma_2(t) = R + it$, $t \in [0,R]$

$$\left|\int_{\gamma_2} f(w)\,dw\right| = \left|\int_0^R e^{i(R+it)^2}\cdot i\,dt\right| = \left|\int_0^R \exp\left(i(R^2-t^2) - 2Rt\right) dt\right|$$

$$\le \int_0^R \underbrace{\left|\exp\left(i(R^2-t^2)\right)\right|}_{=1}\cdot e^{-2Rt}\,dt = \int_0^R e^{-2Rt}\,dt =$$

$$= \frac{e^{-2Rt}}{-2R}\Bigg|_{t=0}^{t=R} = \frac{e^{-2R^2} - 1}{-2R} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

$$\int_{\gamma_3} e^{iz^2}\,dz = -\int_0^R e^{i((1+i)t)^2}(1+i)\,dt =$$



$$= -(1+i)\int_0^R e^{i(2i\cdot t^2)}\,\cancel{(1+i)}\,dt =$$

$$\boxed{(-\gamma_3)(t) = (1+i)t,\quad t\in[0,R]}$$

$$= -(1+i)\int_0^R e^{-2t^2}\,dt \xrightarrow[R\to\infty]{} -(1+i)\int_0^\infty e^{-2t^2}\,dt =$$

$$= -(1+i)\,\frac{1}{2}\cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\left(\frac{1}{2}\right)^2}}\,dt}_{=1}\cdot\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{2} = -(1+i)\,\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

$$0 = \int_{\partial\Delta} e^{iz^2}\, dz = \left(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} \right) e^{iz^2}\, dz \xrightarrow[R\to\infty]{}$$

$$\xrightarrow{R\to\infty} \underbrace{\int_0^\infty \left(\cos(t^2) + i\sin(t^2)\right) dt + 0 - (1+i)\frac{\sqrt{2\pi}}{4}}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \cos(t^2)\, dt = \int_0^\infty \sin(t^2)\, dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

Tw. (Morery)

Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ – otwarty. Jeśli $f \in C(\Omega)$ oraz

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0 \quad \text{dla dow. } \Delta \subset \Omega,$$

to $f \in H(\Omega)$.

Dd. Weźmy $D(p,r) \subset \Omega$. Określmy

$$F(z) = \int_{\langle p,z\rangle} f(w)\,dw, \qquad z \in D(p,r).$$

Tak jak w dowodzie tw. o f. pierwotnej dowodzimy, że $F' = f$ na $D(p,r)$. Zatem $F \in H(D(p,r))$, więc $F' \in H(D(p,r))$, ale $F' = f$. Z dow. wyboru $D(p,r)$ otrzymujemy $f \in H(\Omega)$. $\boxtimes$

Tw. (o zerach)

Zał., że $\Omega \subset \mathbb{C}$ jest otwarty i spójny, $f \in H(\Omega)$,

$$Z(f) = \{a \in \Omega : f(a) = 0\}.$$

Wtedy albo $Z(f) = \Omega$, albo $Z(f)$ nie ma punktów skupienia <u>w Ω</u>. W tym drugim przypadku, dla dow. $a \in Z(f)$ istnieje liczba $m = m(a) \in \mathbb{Z}$ (jedyna) taka, że

$$f(z) = (z-a)^m g(z) \qquad (z \in \Omega),$$

gdzie $g \in H(\Omega)$, $g(a) \neq 0$. Co więcej, $Z(f)$ jest przeliczalny.

D-d. Niech A = zbiór wszystkich punktów skupienia $Z(f)$ leżących w Ω

{ z jest p. skupienia $E \iff z \in \overline{E \setminus \{z\}}$

Ponieważ $f \in C(\Omega)$, więc $A \subset Z(f)$.

Ustalmy $a \in Z(f)$ i niech $D(a,r) \subset \Omega$. Wtedy

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad (z \in D(a,r)).$$

Są dwie możliwości: • wszystkie $c_n = 0 \Rightarrow f \equiv 0$ na $D(a,r)$

wtedy $a \in \operatorname{Int} A$

• istnieje (najmniejsza) liczba $\underline{m \in \mathbb{Z}}$ t. że $\underline{c_m \neq 0}$

Połóżmy

$$g(z) = \begin{cases} (z-a)^{-m} \cdot f(z) & , z \in \Omega \setminus \{a\} \\ c_m & , z = a. \end{cases}$$

Wówczas $\boxed{f(z) = (z-a)^m \cdot g(z)}$ $(z \in \Omega)$, $g \in H(\Omega \setminus \{a\})$.

Zauważmy, że

$$g(z) = (z-a)^{-m} \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z-a)^{n-m} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m} (z-a)^n \qquad (z \in D'(a,r))$$

czyli

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m} (z-a)^n \quad , z \in D(a,r)$$

$\Rightarrow g \in H(\Omega)$.

Zachodzi $g(a)=c_m \neq 0$, więc z cg. funkcji g istnieje otoczenie punktu a, na którym $g \neq 0$. Stąd i ze wzoru $\underbrace{f(z)=(z-a)^m g(z)}_{(z\in\Omega)}$, wynika, że również $f \neq 0$ na tym otoczeniu z wyjątkiem punktu a.

To oznacza, że $a \notin A$.

Jeśli $a \in A$, to $a \in Z(f)$, więc z pow. obserwacji $a \in \operatorname{Int} A$. Zatem A jest otwarty. Z drugiej strony, A jest domknięty w Ω: jeśli $a_n \in A$, $a_n \to a_0 \in \Omega$, $a_n \neq a_0$, to $f(a_n)=0$, więc z cg. f: $f(a_0)=0$ oraz $a_0 \in A$.

Ze spójności Ω: $A=\Omega$ (wtedy $Z(f)=\Omega$, wtedy $f\equiv 0$ na Ω), albo $A=\emptyset$.

$Z(f)$ nie ma punktów skupienia w Ω, więc $Z(f)\cap K$ – skończone dla dow. zwartego $K \subset \Omega$, ponieważ Ω jest przeliczalną sumą zb. zwartych, więc $Z(f)$ jest co najwyżej przeliczalny. $\boxtimes$

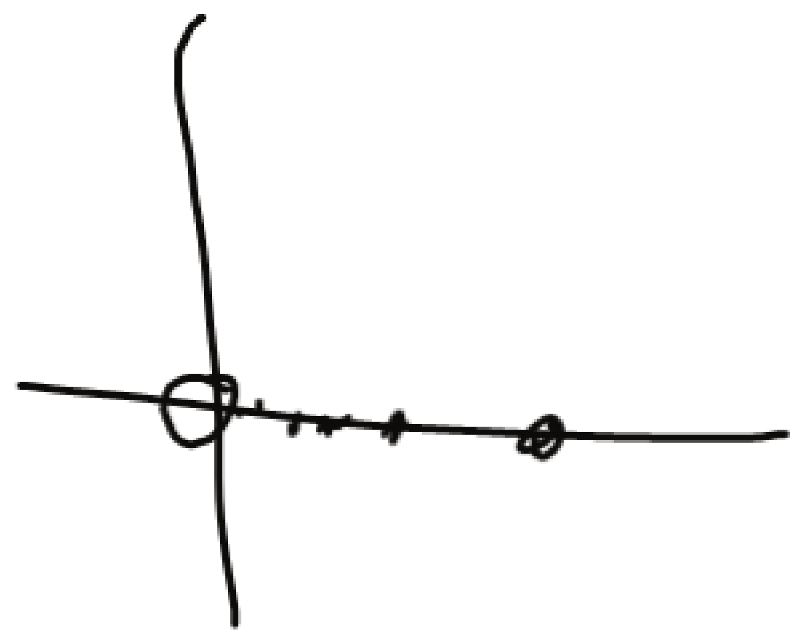
Wniosek: Jeśli $f, g \in H(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ otw. spójny

i $\underline{f(z) = g(z)}$ dla $z \in E \subset \Omega$

i E ma punkt skupienia w Ω, to $f = g$ na Ω.

Np: $f, g \in H(\mathbb{C})$, $f\left(\frac{1}{n}\right) = g\left(\frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$

$\Rightarrow f = g$ na $\mathbb{C}$.



Def Jeśli $a \in \Omega$ i $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$, to mówimy, że f ma w a osobliwość odosobnioną (izolowaną). Jeśli f można określić w punkcie a w taki sposób, aby to rozszerzenie było holomorficzne na Ω, to mówimy, że f ma w a osobliwość pozorną (usuwalną).

Tw. Niech $a \in \Omega$, $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$.

Załóżmy, że

f jest ograniczona na pewnym $D'(a,r)$

lub ogólniej,

$$\lim_{z \to a} \underbrace{(z-a)}\underbrace{f(z)} = 0.$$

Wówczas f ma w punkcie a osobliwość pozorną.

Dd. Połóżmy $h(z) = \begin{cases} 0, & z = a \\ (z-a)^2 f(z), & z \in \Omega \setminus \{a\}. \end{cases}$

Oczywiście $h \in H(\Omega \setminus \{a\})$ oraz $h'(a) = \lim_{z \to a} \frac{h(z) - \overset{0}{h(a)}}{z-a} = \lim_{z \to a} \frac{(z-a)^2 f(z)}{z-a} = 0$

czyli $h \in H(\Omega)$. Zatem

$$h(z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad (z \in D(a,r) \subset \Omega)$$

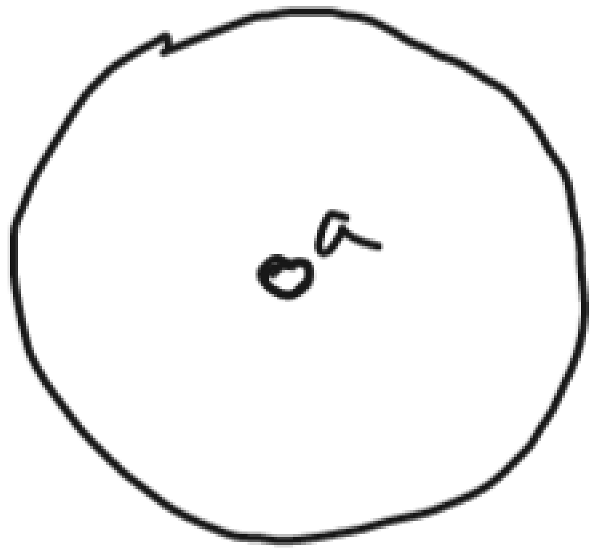
Jeśli weźmiemy $\tilde{f}(a) = c_2$, ($\tilde{f}(z) = f(z)$, $z \in \Omega \setminus \{a\}$) to otrzymamy (dla $z \in D(a,r)$)

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} (z-a)^n, \quad z \in D(a,r)$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z-a)^{n-2}$$

$\Rightarrow \tilde{f}'(a)$ istnieje. $\boxtimes$

$f \in H(D'(a,r))$



$$|f(z)| \approx \frac{1}{\sqrt{|z-a|}}$$ — memoilive

$$\lim_{z\to a} f(z)(z-a) = 0$$

Przypomnienie $f \in H(\Omega)$, $\overline{D(p,r)} \subset \Omega \implies$

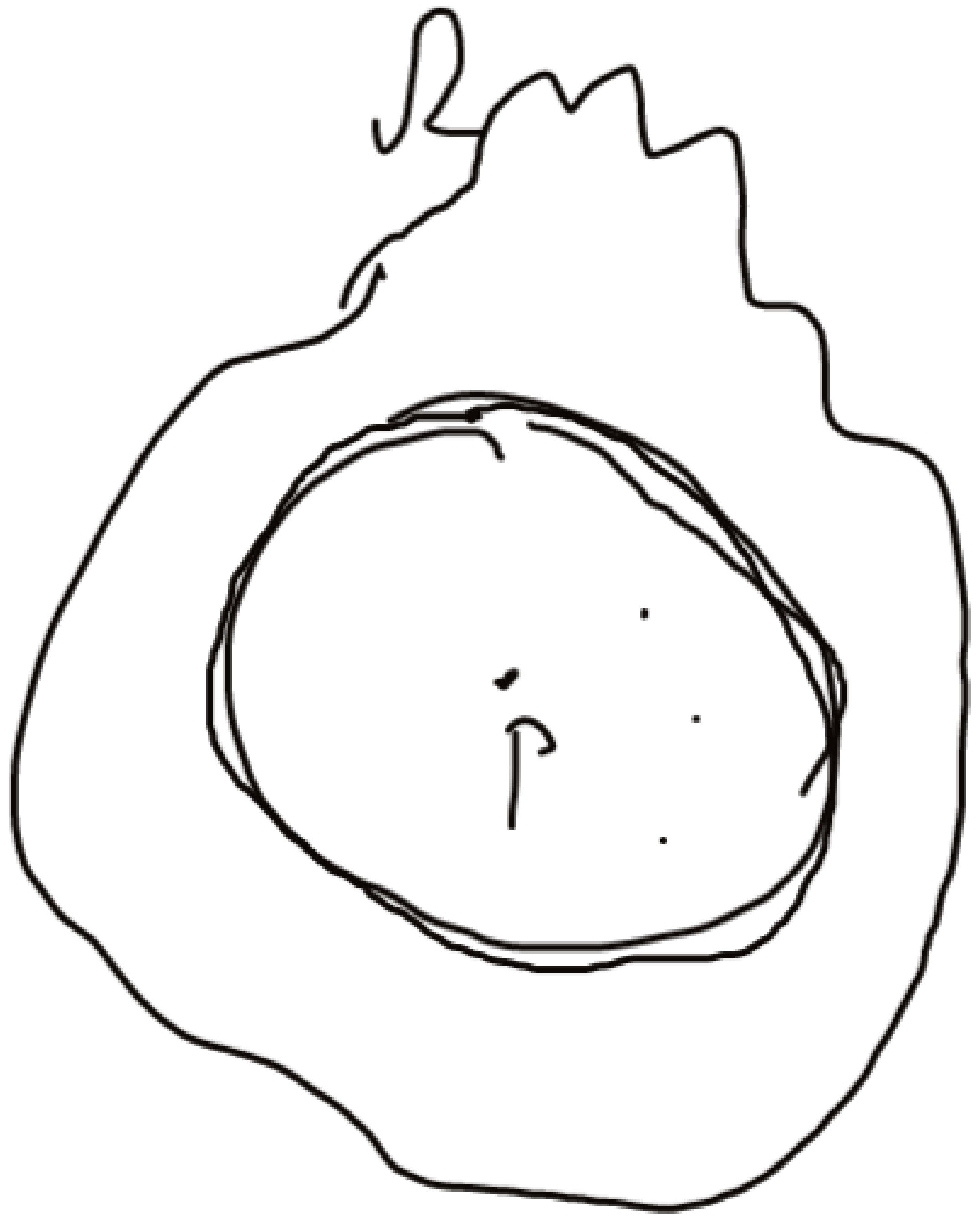
$$f^{(n)}(p) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(p + re^{it})\, e^{-int}\, dt,$$

$n = 0, 1, \ldots$

Tw. (o wartości średniej)

$f \in H(\Omega)$, $\overline{D(p,r)} \subset \Omega$

$$\implies \quad f(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p + re^{it})\, dt$$



Tw. (nierówności Cauchy'ego)

Jeśli $f \in H(D(a,R))$ i $\underbrace{|f| \leq M}$, to

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \leq \frac{n!\, M}{R^n}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Dd. Dla $r < R$

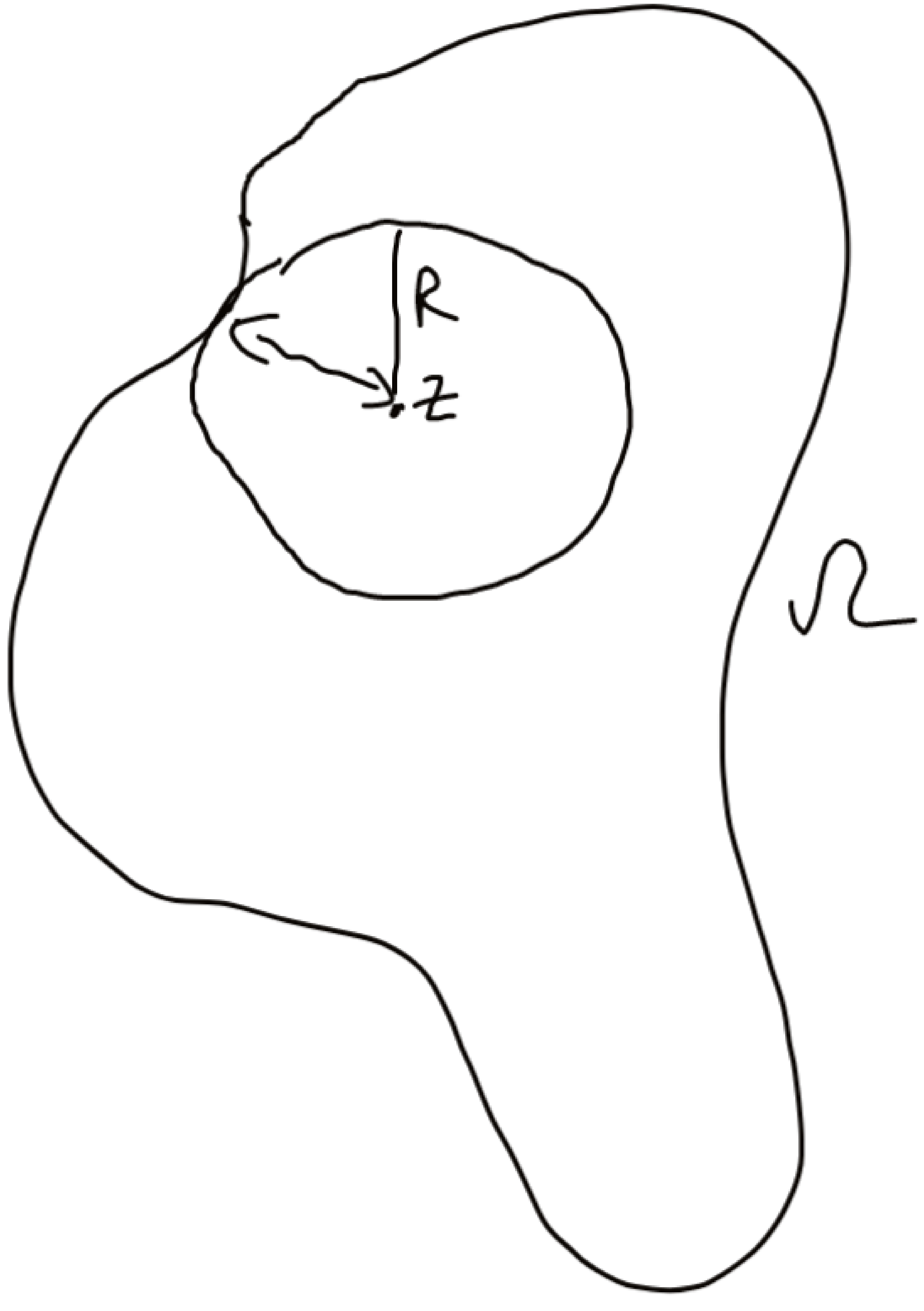
$$\left|f^{(n)}(a)\right| = \frac{n!}{2\pi r^n} \left| \int_0^{2\pi} \underline{f(a + re^{it})}\, e^{-int}\, dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \left|f(a + re^{it})\right| dt \leq \frac{n!\, M}{r^n}$$

Teza ~~wynika~~ otrzymujemy po wzięciu $r \to R^-$. $\blacksquare$

Wniosek. $f \in H(\Omega)$, $|f| \le M$ na Ω

$$\Rightarrow \quad |f^{(n)}(z)| \le \frac{n!\, M}{\operatorname{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega)^n}.$$



$R = \operatorname{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega)$

$f \restriction D(z, R)$

Tw. (Liouville'a)

Ograniczone funkcje całkowite są stałe.

Dd. Niech $f \in H(\mathbb{C})$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$

Jeśli $|f| \le M$, to z nier. C. dla $n = 1, 2, \ldots$

$$|f^{(n)}(0)| \le \frac{n!\, M}{R^n} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$$

$f^{(n)}(0) = 0$ dla $n = 1, 2 \ldots \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = 0 \Rightarrow f(z) = a_0$, $z \in \mathbb{C}$. ⊠