Przypomnienie:

f jest **całkowita**, jeśli $f \in H(\mathbb{C})$

Tw. (Liouville'a)

Ograniczone f-cje całkowite są stałe.

Tw. (zasadnicze tw. algebry)

Każdy wielomian zespolony stopnia dodatniego ma (co najmniej jeden) pierwiastek.

Dow. Niech $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$, $a_n \neq 0$, $n > 0$.

Wtedy
$$\frac{1}{P(z)} = \frac{1}{\underbrace{a_n z^n}_{\xrightarrow{z\to\infty} \infty} \left(1 + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{z}}_{\to 0} + \ldots + \underbrace{\frac{a_1}{a_n}\frac{1}{z^{n-1}}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{a_0}{a_n}\frac{1}{z^n}}_{\to 0}\right)} \longrightarrow 0 \quad \text{przy } z \to \infty$$

Gdyby P nie miał pierwiastków, to funkcja $\frac{1}{P}$ byłaby całkowita i ograniczona, a więc z tw. Liouville'a byłaby stała.

Wtedy $P = \text{const.}$, $\lightning$.

$\boxtimes$

Tw. o wart. średniej: $f\in H(\Omega)$, $\overline{D(a,r)}\subset\Omega$, to $f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\,dt$

Tw. (o maksimum modułu)

Jeśli $\Omega\subset\mathbb{C}$ jest otwarty i spójny, $f\in H(\Omega)$ oraz $\overline{D(a,r)}\subset\Omega$, to
$$|f(a)|\le \max_{\vartheta\in[0,2\pi]}|f(a+re^{i\vartheta})|,$$
przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy f jest stała.

Dow. Z tw. o wart. śr.
$$|f(a)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\,dt\right|\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(a+re^{it})|\,dt$$
$$\le \max_{t\in[0,2\pi]}|f(a+re^{it})|\cdot\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}1\,dt}_{=1}$$

Załóżmy, że $|f(a)| = \max_{\vartheta\in[0,2\pi]}|f(a+re^{i\vartheta})|$ i niech c będzie liczbą o module 1 taką, że $|f(a)|=cf(a)$. Wtedy
$$\mathrm{Re}\; cf(a+re^{it})\le|cf(a+re^{it})|=|f(a+re^{it})|\le|f(a)| \quad (*)$$
Z tw. o wart. średniej
$$0=\mathrm{Re}\left(c\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big(f(a+re^{it})-f(a)\big)\,dt\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big(cf(a+re^{it})-|f(a)|\big)\,dt\right)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big(\underbrace{\mathrm{Re}(cf(a+re^{it}))-|f(a)|}_{\le 0\ (*)}\big)\,dt\le 0 \ (*)$$

Ponieważ f-cja podcałkowa jest cg. i niedodatnia oraz ma całkę 0, więc
$$\mathrm{Re}(cf(a+re^{it}))=|f(a)|=cf(a)\qquad (t\in[0,2\pi])$$
Stąd $\mathrm{Im}(cf(a+re^{it}))=0$, bo gdyby nie, to mielibyśmy $|cf(a+re^{it})|>\mathrm{Re}(cf(a+re^{it}))=|f(a)|$ ↯

Stąd

$$cf(a+re^{it}) = cf(a) \qquad \text{dla } t\in[0,2\pi]$$

czyli $f(z)=f(a)$ dla $z: |z-a|=r$.

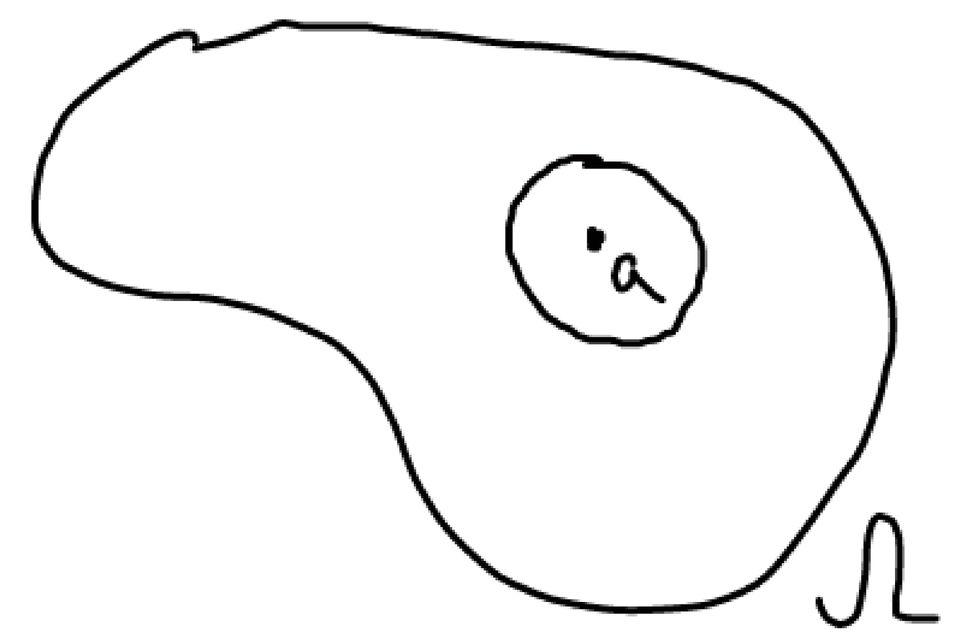
Zatem funkcja $h(z)=f(z)-f(a)$ jest holomorficzna na Ω i każdy punkt okręgu $|z-a|=r$ jest jej zerem.

Z tw. o zerach h jest ~~stała, a więc~~ stale równa zero na Ω, a więc $f(z)=f(a)$ $\forall z\in\Omega$. $\boxtimes$

$f=\text{const}.$

Tw. (Klasyfikacja osobliwości) $\Omega \subset \mathbb{C}$ otwarty

Jeśli $a \in \Omega$, $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$, to zachodzi jedna z trzech możliwości:



(a) f ma w a osobliwość pozorną

(b) istnieje liczba $m \in \mathbb{N}$ i liczby $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$, $c_m \neq 0$ takie, że funkcja

$$f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$$

ma osobliwość pozorną w punkcie a

(c) dla dowolnej liczby $r>0$ takiej, że $D(a,r) \subset \Omega$ zbiór $f(D'(a,r))$ jest gęsty w $\mathbb{C}$.

W przypadku (b) mówimy, że f ma <u>biegun</u> <u>rzędu</u> m w punkcie a z <u>częścią główną</u>

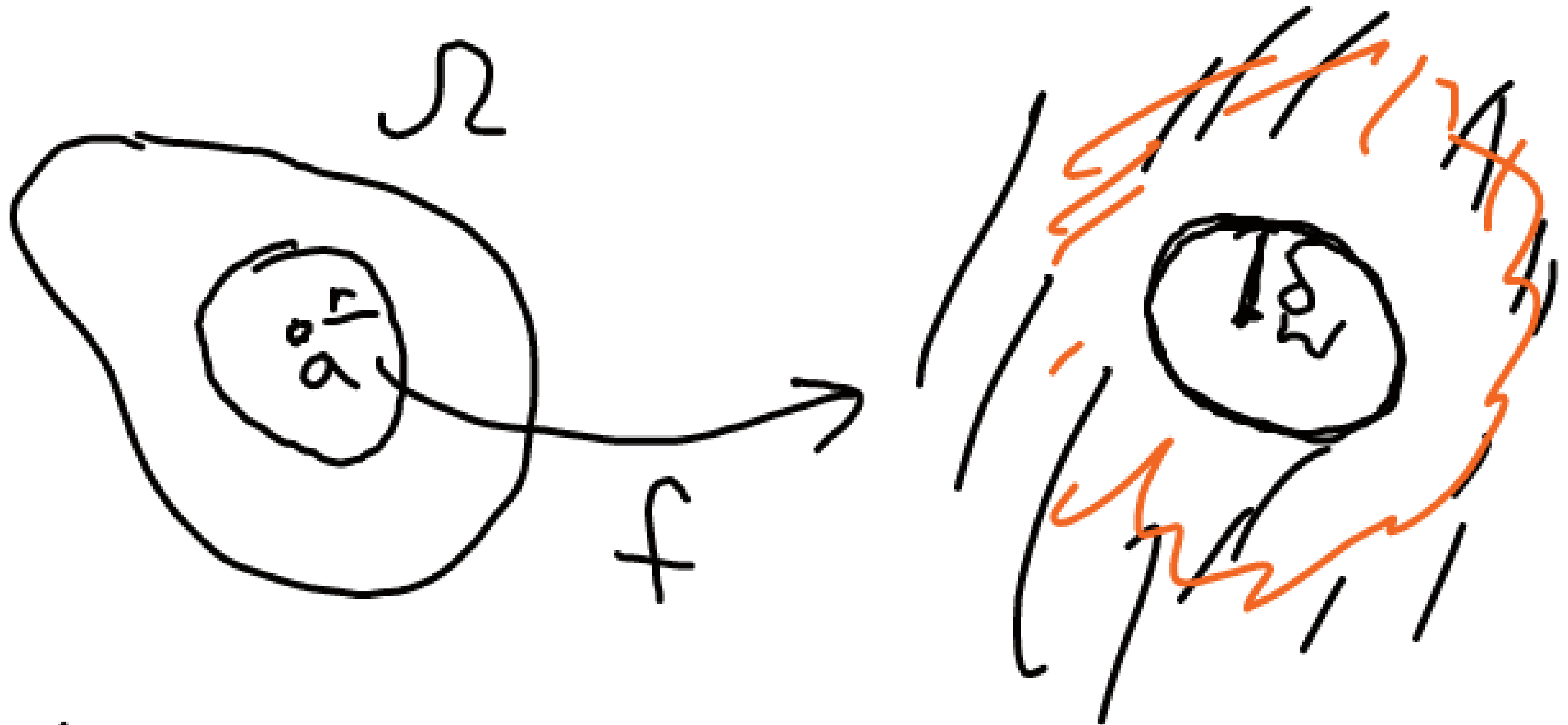
$$\sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}.$$

W przypadku (b)

$$f(z) = \underbrace{\left(f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}\right)}_{\text{ma granicę skończoną}} + \underbrace{\frac{1}{(z-a)^m}}_{\downarrow \, \infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{m} c_k (z-a)^{m-k}}_{\substack{\text{wielomian różny od 0 w } a \\ (=c_m \neq 0)}} \xrightarrow{z \to a} \infty$$

W przypadku (c) mówimy, że f ma w a <u>osobliwość istotną</u>.

<u>Dd.</u> Załóżmy, że nie zachodzi (c).



Istnieją wówczas $r>0$, $\delta>0$, $w\in\mathbb{C}$ takie, że

$$|f(z)-w|>\delta \quad \text{dla} \quad z\in D'(a,r).$$

Oznaczmy $D=D(a,r)$, $D'=D'(a,r)=D(a,r)\setminus\{a\}$. Określmy

$$(*) \qquad g(z)=\frac{1}{f(z)-w} \qquad (z\in D')$$

wtedy $|g|<\frac{1}{\delta}$ na D'. Z poprzedniego tw. g ma w a osobliwość pozorną, możemy więc ją rozszerzyć do funkcji (znowu oznaczonej tak samo) $g\in H(D)$.

Jeśli $g(a)\neq 0$, to z $(*)$ wynika, że $f(z)-w=\dfrac{1}{g(z)}$ ma osobliwość pozorną w a, więc zachodzi przypadek (a).

$$(*)\quad g(z)=\frac{1}{f(z)-w} \qquad (z\in D') \qquad\qquad g\in H(D)$$

Załóżmy teraz, że $g(a)=0$. Ponieważ $g\neq 0$ na D', więc a jest zerem izolowanym g, ma krotność $m\geq 1$ i zachodzi

$$(**)\quad g(z)=(z-a)^m\cdot g_1(z) \qquad (z\in D),$$

gdzie $g_1\in H(D)$, $g_1(a)\neq 0$. Ponieważ $g\neq 0$ na D', to $g_1\neq 0$ na D.

Niech $h=\frac{1}{g_1}\in H(D)$ i h nie ma zer na D. Funkcja h rozwija się w szereg potęgowy: $h(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n \quad (z\in D)$

Zatem

$$f(z)-w \overset{(*)}{=} \frac{1}{g(z)} \overset{(**)}{=} (z-a)^{-m}\frac{1}{g_1(z)} = (z-a)^{-m}\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n =$$

$$=\sum_{n=0}^{m-1} b_n(z-a)^{n-m} + \sum_{n=m}^{\infty} b_n(z-a)^{n-m}$$

$$=\underbrace{\left(\frac{b_{m-1}}{z-a}+\frac{b_{m-2}}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{b_0}{(z-a)^m}\right)}_{\text{część główna}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} b_{n+m}(z-a)^n}_{\text{ma skończoną granicę w punkcie } a\ (\in H(D))}$$

$b_0\neq 0$, bo $b_0=h(a)\neq 0$.

Zatem zachodzi przypadek (b). $\boxtimes$

Residua

Def $\Omega \subset \mathbb{C}$ - otwarty, $a \in \Omega$, $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$

Jeśli f ma biegun w punkcie a z częścią główną równą

$$Q(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k},$$

to liczbę c_1 nazywamy <u>residuum</u> funkcji f w punkcie a i oznaczamy symbolem $\operatorname{res}(f, a)$.

Def. Funkcję f nazywamy <u>meromorficzną</u> w zbiorze otw. $\Omega \subset \mathbb{C}$, jeśli istnieje zbiór $A \subset \Omega$ taki, że

- A nie ma punktów skupienia w Ω
- $f \in H(\Omega \setminus A)$
- f ma biegun w każdym punkcie zbioru A

Np. funkcje wymierne są meromorficzne w $\mathbb{C}$

np. $\frac{z+3}{(z-1)(z+2)}$ ma bieguny w $1, -2$ $\in H(\mathbb{C} \setminus \{1, -2\})$.

Lemat

Jeśli γ jest drogą zamkniętą w $\mathbb{C}$

$$Q(z)=\sum_{k=1}^{m}\frac{c_k}{(z-a)^k}, \quad a\notin\gamma^*, \quad \text{to}$$

$$\int_\gamma Q(z)\,dz = 2\pi i\cdot c_1\cdot \mathrm{Ind}_\gamma(a).$$

D-d.

$$\int_\gamma \frac{c_k}{(z-a)^k}\,dz = \begin{cases} 0, & \text{gdy } k>1 \\ 2\pi i\cdot c_1\cdot \mathrm{Ind}_\gamma(a), & \text{gdy } k=1\end{cases}$$

$\left(\text{bo } \frac{c_k}{(z-a)^k}=\left(\frac{c_k(z-a)^{-k+1}}{-k+1}\right)'\right)$

Tw. Jeśli $\Omega\subset\mathbb{C}$ jest zbiorem gwiaździstym i otwartym, f – funkcją meromorficzną na Ω ze skończonym zbiorem biegunów $A=\{a_1,\dots,a_n\}$ ($a_i\neq a_j$ dla $i\neq j$) oraz γ – drogą zamkniętą w $\Omega\setminus A$, to

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{res}(f,a_k)\cdot\mathrm{Ind}_\gamma(a_k)$$

D-d. Niech Q_k będzie częścią główną bieguna f w a_k, $k=1,\dots,n$.

Wtedy $f-(Q_1+Q_2+\dots+Q_n)$ ma tylko osobliwości pozorne w Ω.

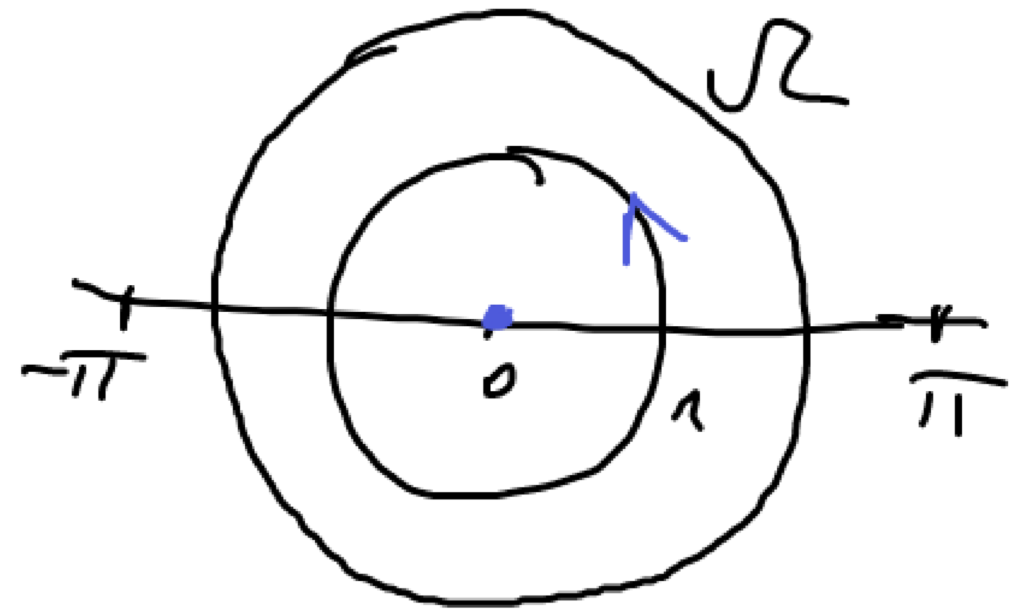
Z tw. Cauchy'ego

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \underbrace{\int_\gamma (f-Q_1-\dots-Q_n)(z)\,dz}_{=0\ (\text{tw. C})} + \int_\gamma (Q_1+\dots+Q_n)(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{res}(f,a_k)\,\mathrm{Ind}_\gamma(a_k)$$

$\boxtimes$

Przykład

$$\int_\gamma \frac{dz}{\sin z} = 2\pi i \cdot \underbrace{\operatorname{res}\left(\frac{1}{\sin}, 0\right)}_{=1} \cdot \underbrace{\operatorname{Ind}_\gamma(0)}_{=1} = 2\pi i$$



$\gamma(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$. sin ma zera w $\pi\mathbb{Z}$

$\frac{1}{\sin z}$ ma osobliwości odosobnione w $\pi\mathbb{Z}$. $\Omega := D(0,2)$

$\frac{1}{\sin}$ jest meromorficzna na Ω z biegunem w 0, istotnie

$\lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{\sin z} = \infty$. Odgadujemy, że część główną f w 0

jest $\frac{1}{z}$. Sprawdźmy:

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to 0} \frac{z - \sin z}{z \sin z} = \lim_{z\to 0} \frac{z - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right)}{z \sin z} \begin{matrix} :z^2 \\ = \\ :z^2 \end{matrix}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\frac{z}{3!} - \frac{z^3}{5!} + \frac{z^5}{7!} - \ldots}{\frac{\sin z - 0}{z - 0}} = \frac{0}{1} = 0$$

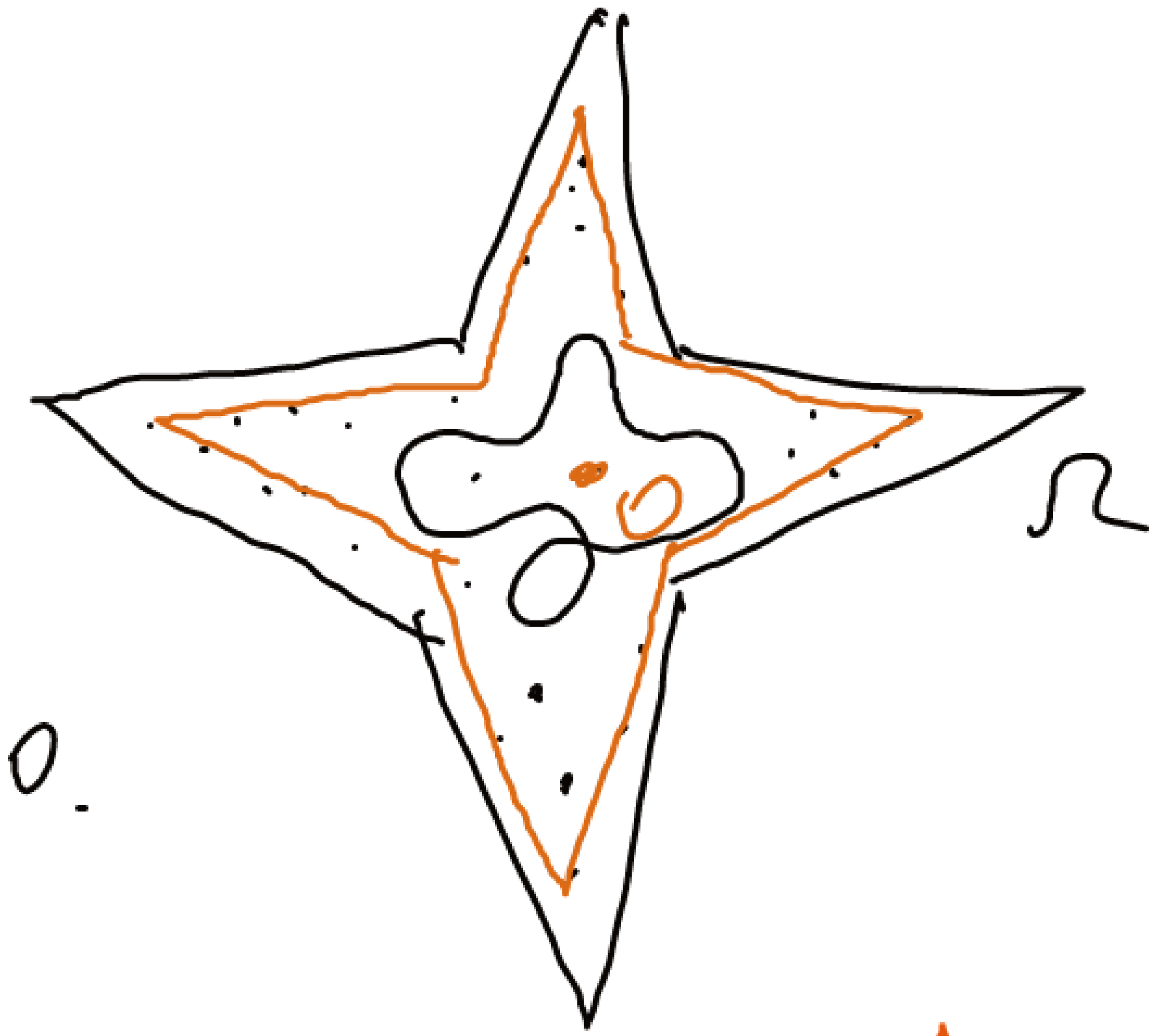
$(\sin)'(0) = \cos 0 = 1$

Rzeczywiście, funkcja $z \mapsto \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}$ ma w 0 osobliwość usuwalną.

A zatem $\operatorname{res}\left(\frac{1}{\sin}, 0\right) = 1$.

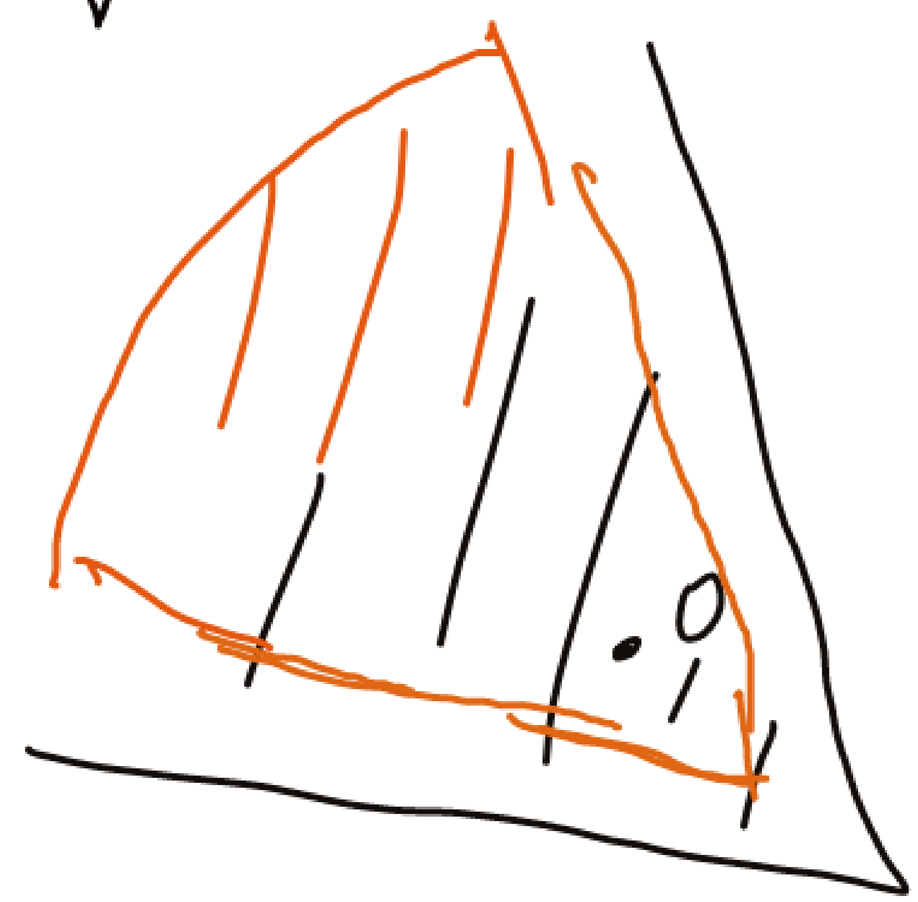
Uwaga.

W tw. o residuach założenie o skończoności zbioru biegunów można pominąć. Zał. że Ω jest gwiaździsty względem 0. Można rozważyć zbiory



$$\Omega_t = \underbrace{t\Omega}_{\subset\,\Omega} \cap D\left(0, \frac{1}{1-t}\right) \qquad t\in(0,1)$$

gwiaździste



$$s<t \Rightarrow \overline{s\Omega} \subset t\Omega$$

$\overline{\Omega_t}$ są zwarte, więc $A \cap \overline{\Omega_t}$ jest skończony

$$\gamma^* \subset \Omega = \bigcup_{t\in(0,1)} \Omega_t \Rightarrow \exists_{t\in(0,1)}\ \gamma^* \subset \Omega_t$$

zb. zwarty

pokrycie otwarte

Można zastosować tw. o residuach dla $f|_{\Omega_t}$, $\Omega = \Omega_t$, γ, $A \cap \Omega_t$