Tw. Jeśli funkcja meromorficzna ma w a biegun rzędu $\leq m$, to

$$\operatorname{res}(f, a) = \lim_{z \to a} \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}} \left[(z-a)^m f(z) \right]$$

W szczególności, gdy biegun jest rzędu 1, to

$$\operatorname{res}(f, a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z).$$

D-d na ćwiczeniach.

__Przykład__ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \dots \, dx$

Standardowa metoda przy obliczaniu całki $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$: (Q nie ma pierw. rzeczywistych)

$\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0,\pi]$ $\qquad \gamma = \langle -R,R\rangle + \gamma_R$

$\langle -R,R\rangle$

$$\left(\int_{\langle -R,R\rangle} + \int_{\gamma_R}\right)\frac{P}{Q}(x)\,dx = \underbrace{2\pi i \sum_{a\in A} \operatorname{res}\left(\frac{P}{Q}, a\right) \operatorname{Ind}_\gamma(a)}$$

$\displaystyle\int_{\langle -R,R\rangle} \downarrow \int_{-\infty}^{\infty}\dots \qquad \int_{\gamma_R} \downarrow 0$, jeśli $\deg P \le \deg Q - 2$

Tutaj zrobimy inaczej:

$\gamma = \langle 0,R\rangle + \gamma_R + \langle Ri, 0\rangle$

$\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$(*) \qquad L = \int_\gamma \overbrace{\frac{x^2}{x^4+x^2+1}}^{f(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{a\in A} \operatorname{res}(f,a)\operatorname{Ind}_\gamma(a) \quad \longleftarrow$$

$$L = \int_{\langle 0,R\rangle} f(x)\,dx + \int_{\gamma_R} f(x)\,dx + \int_{\langle Ri,0\rangle} f(x)\,dx$$

$$\int_{\langle 0,R\rangle} f(x)\,dx = \int_0^R f(x)\,dx \xrightarrow[R\to\infty]{} \int_0^\infty f(x)\,dx \text{ — szukana całka}$$

$$\int_{\langle Ri,0\rangle} f(x)\,dx = -\int_0^R f(it)\,i\,dt = -\int_0^{R} \frac{(it)^2\, i}{(it)^4+(it)^2+1}\,dt = -\int_0^R \frac{-it^2\,dt}{t^4-t^2+1} \xrightarrow[R\to\infty]{} \underline{i\int_0^\infty \frac{t^2\,dt}{t^4-t^2+1}}$$

$-\tilde{\gamma}(t) = it$, $t\in[0,R]$

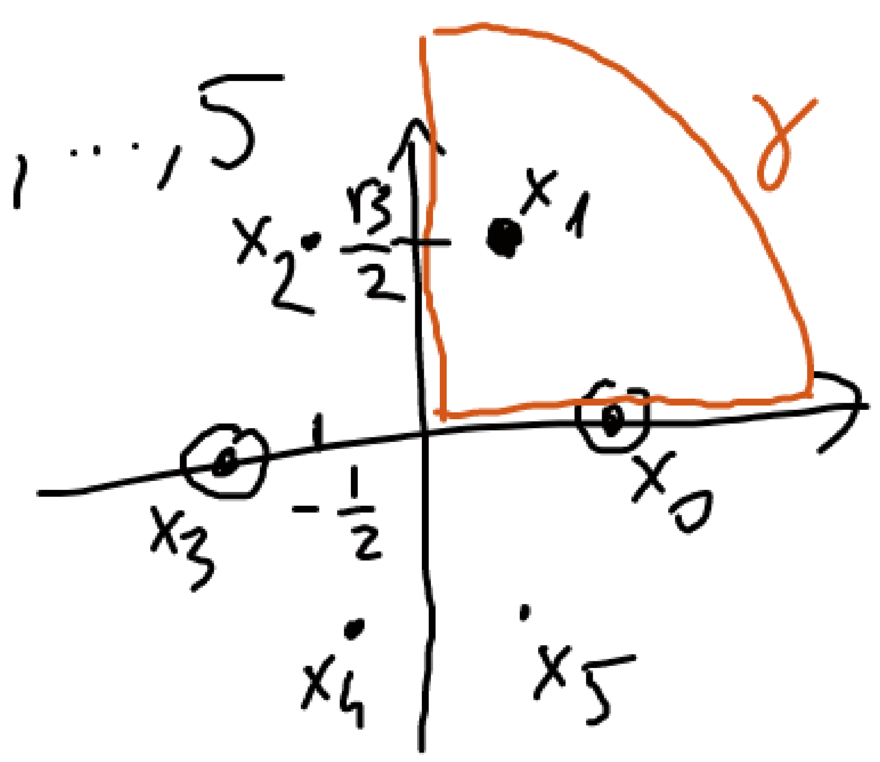
$$\left|\int_{\gamma_R} f(x)\,dx\right| = \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(Re^{it})^2}{(Re^{it})^4+(Re^{it})^2+1}\, Rie^{it}\,dt\right| \leq$$

$$\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^3}{\left|\underbrace{R^4e^{4it}}+\underbrace{R^2e^{2it}}+\underbrace{1}\right|}\,dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^3}{R^4-R^2-1}\,dt = \frac{\pi}{2}\,\frac{R^3}{R^4-R^2-1} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

dla dużych R

$$f(x)=\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{x^2}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)(x-x_5)}\qquad (x^4+x^2+1)(x^2-1)=x^6-1=0$$

$$x_k=e^{\frac{2\pi k i}{6}},\quad k=0,1,\dots,5$$



pierwiastkami $Q(x)=x^4+x^2+1$ są $e^{\frac{2\pi k i}{6}}$, $k=1,2,4,5$

$\mathrm{Ind}_\gamma(x_k)=0$ dla $k=2,4,5$ $\quad x_1=e^{\frac{\pi i}{3}}$ jest biegunem rzędu 1 f

$$\mathrm{res}(f,x_1) \underset{\text{popr. tw.}}{=} \lim_{x\to x_1}\left[f(x)(x-x_1)\right] = \lim_{x\to x_1}(x-x_1)f(x) \text{ – skończona}$$

$$=\lim_{x\to x_1}\frac{x^2}{\frac{(x^4+x^2+1)-0}{x-x_1}} = \frac{x_1^2}{(x^4+x^2+1)'\big|_{x=x_1}} = \frac{x_1^2}{4x_1^3+2x_1}=$$

$$=\frac{e^{\frac{2\pi i}{3}}}{4e^{\pi i}+2e^{\frac{\pi i}{3}}} = \frac{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}{-4+2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} = \frac{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-3-\sqrt{3}i)}{(-3+\sqrt{3}i)(-3-\sqrt{3}i)} = \frac{1}{2}\,\frac{3+3+\sqrt{3}i-3\sqrt{3}i}{9+3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{6}\right)$$

przechodząc w (*) z $R \to \infty$:

$$\underbrace{\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+x^2+1}\,dx}_{=\frac{\sqrt{3}\pi}{6}} + i \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4-x^2+1}\,dx}_{=\frac{1}{2}\pi} = \cancel{2}\pi i \cdot \cancel{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\,i}{6}\right)\cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{2}\pi i + \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$$

Tw. Jeśli $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$ ma biegun rzędu m w punkcie $a \in \Omega$, to $\frac{f'}{f}$ ma biegun rzędu $\underline{1}$ w a oraz $\operatorname{res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = -m$.

Dd.
$$f(z) = \underbrace{h(z)}_{\in H(\Omega)} + \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k} = (z-a)^{-m}\underbrace{\left[h(z)(z-a)^m + \sum_{k=1}^{m} c_k (z-a)^{m-k}\right]}_{:= g(z),\ g \in H(\Omega\setminus\{a\})} =$$

z osobliwością pozorną w a
$g(a) = c_m \neq 0$

$$= (z-a)^{-m} \cdot g(z)$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(z-a)^{-m} g'(z) + (-m)(z-a)^{-m-1} g(z)}{(z-a)^{-m} g(z)} = \underbrace{\frac{g'(z)}{g(z)}}_{\in H(\cancel{\Omega})} - \underbrace{\frac{m}{z-a}}_{\text{część główna bieguna } \frac{f'}{f}}$$

pewnym otoczeniu a

$\boxtimes$

Tw. Jeśli $f \in H(\Omega)$ ma zero krotności m w punkcie a, to $\frac{f'}{f}$ ma biegun rzędu $\underline{1}$ w a i $\operatorname{res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = m$.

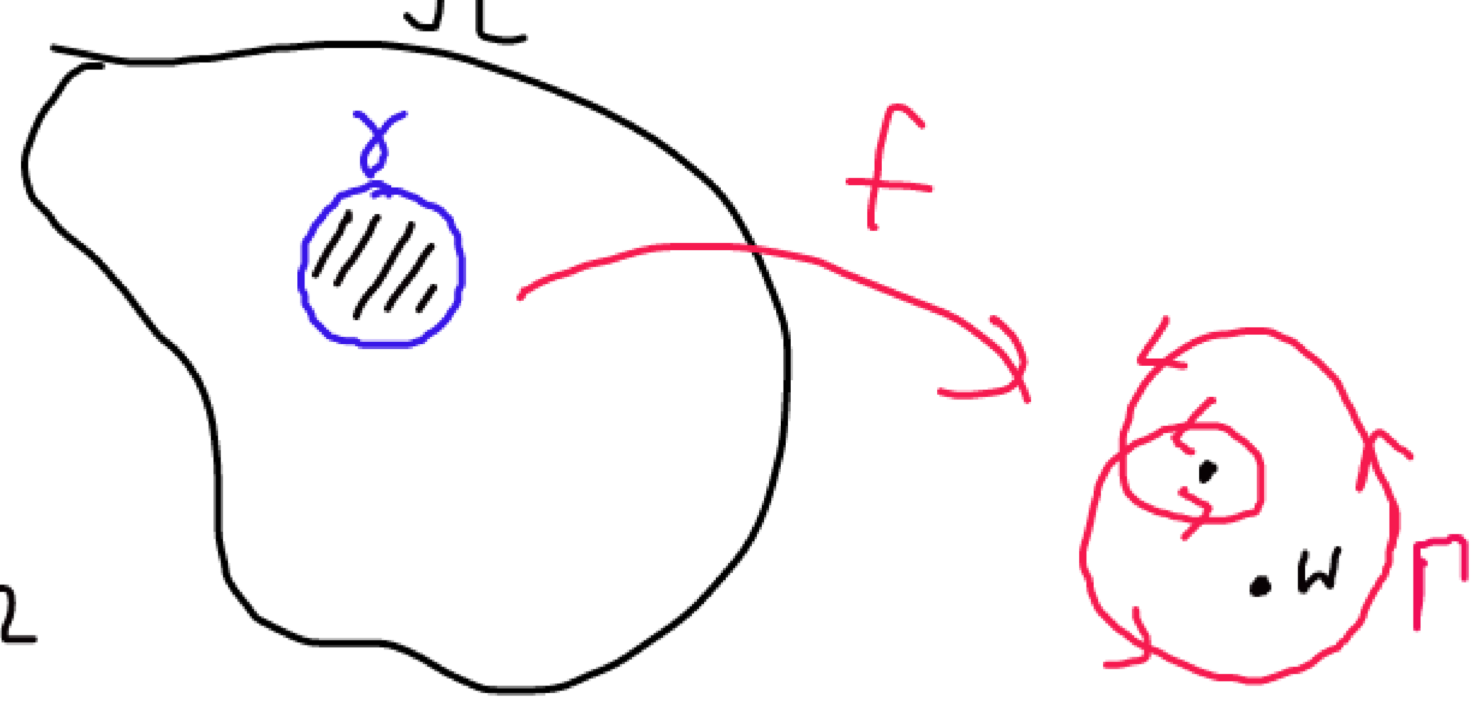
Dd. $f(z) = (z-a)^m g(z)$, $g \in H(\Omega)$, $g(a) \neq 0$.

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \underbrace{\frac{g'(z)}{g(z)}}_{\in H(\text{pewnym otoczeniu } a)} + \frac{m}{z-a} \qquad \operatorname{res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = m.$$

$\boxtimes$

Tw. Niech $f \in H(\Omega)$, $\overline{D(p,r)} \subset \Omega$, $\gamma(t) = p + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Niech $\Gamma(t) = f(\gamma(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Jeśli $w \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, to $\mathrm{Ind}_\Gamma(w)$ jest liczbą zer funkcji $(f-w)$ w $D = D(p,r)$ (liczonych wraz z krotnościami).



D-d.

Niech $a_1, a_2, \dots, a_k$ będą zerami funkcji $(f-w)$ w D, niech N będzie liczbą tych zer, liczonych wraz z krotnościami ($N \geq k$).

tw. o residuach

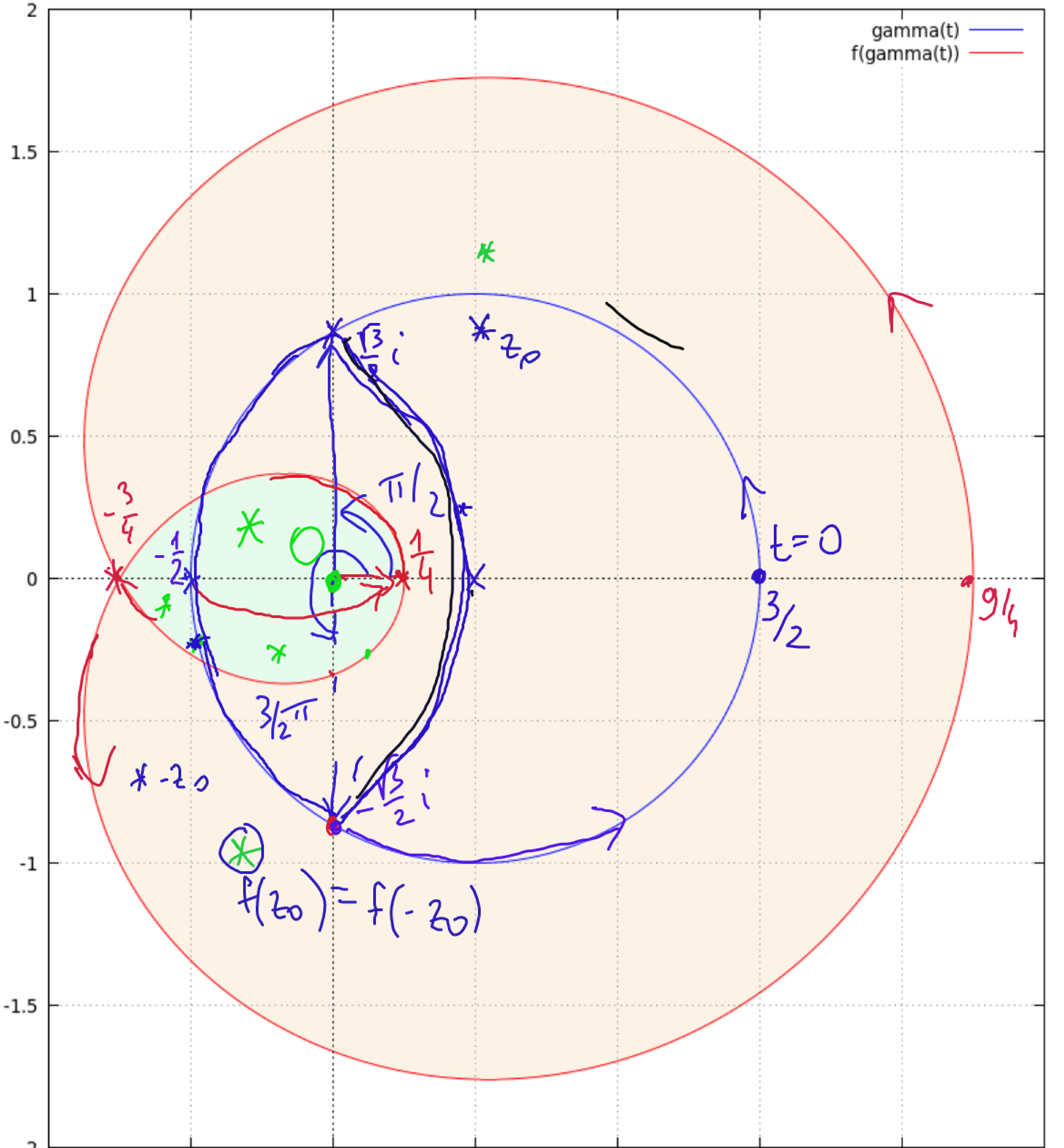
$$N = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{res}\left(\frac{(f-w)'}{f-w}, a_j\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\overbrace{f'(\gamma(t))\,\gamma'(t)}^{\Gamma'(t)}\,dt}{\underbrace{f(\gamma(t))}_{\Gamma(t)} - w} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t) - w}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{z-w}\,dz = \mathrm{Ind}_\Gamma(w).$$

$\boxtimes$

Np: $f(z)=z^2$, $\boxed{\gamma(t)=\frac{1}{2}+e^{it} \quad , t\in[0,2\pi]}$

$\Gamma(t)=f(\gamma(t))=\left(\frac{1}{2}+e^{it}\right)^2=\frac{1}{4}+e^{it}+e^{2it}$

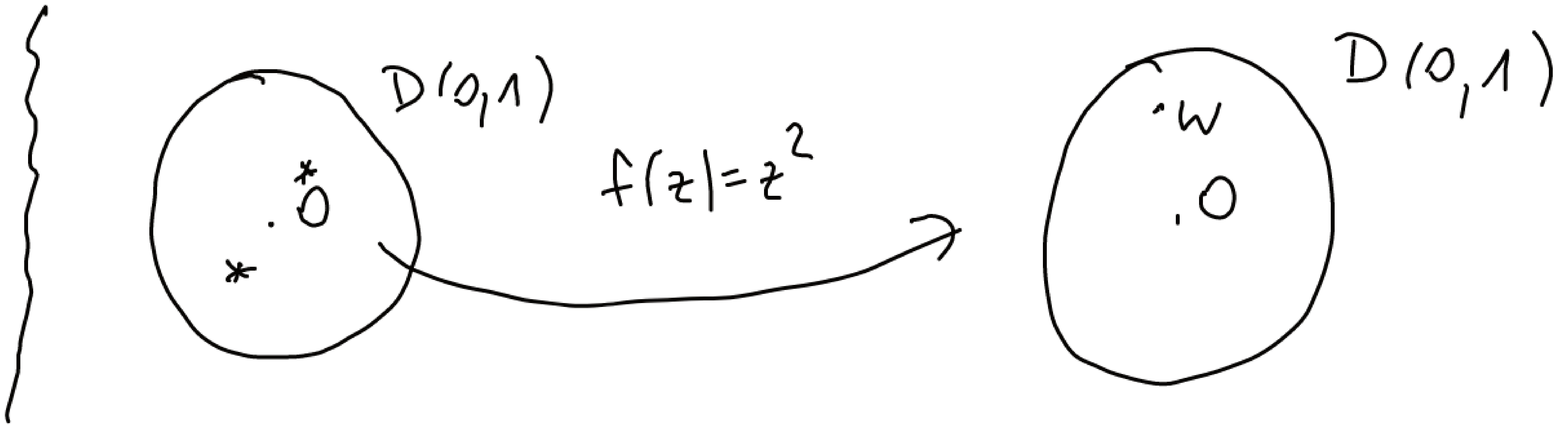


$f(z)=z^2$

$\mathrm{Ind}_\Gamma(0)=2$

Tw. Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ – obszar, $f \in H(\Omega)$, $f \not\equiv const.$, $z_0 \in \Omega$, $w_0 = f(z_0)$, m = krotność zera funkcji $(f - w_0)$ w punkcie z_0. Wówczas istnieją zbiory otwarte V oraz W t. że:

- $z_0 \in V \subset \Omega$
- $W = f(V)$
- $\forall w \in W \setminus \{w_0\}$ istnieje dokładnie m różnych punktów $z \in V$ takich, że $f(z) = w$.



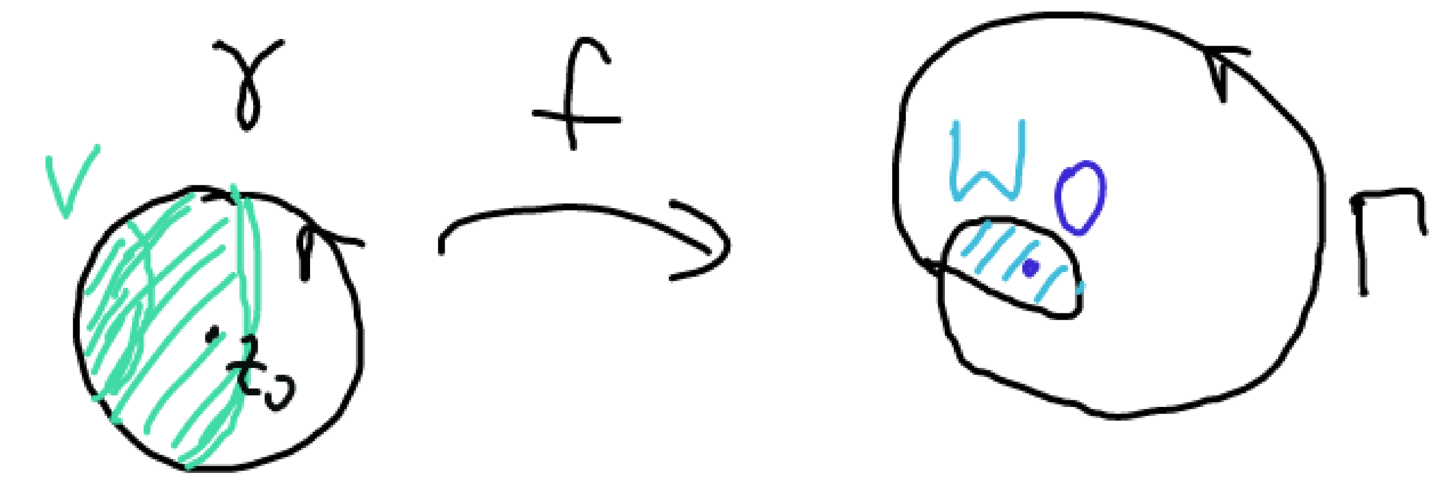
D-d. Bez straty ogólności załóżmy, że $w_0=0$, czyli $f(z_0)=0$.

Ponieważ $f\neq$ const., to istnieje $r>0$ takie, że $\overline{D(z_0,r)}\subset\Omega$ oraz f, f' nie mają zer $\overline{D(z_0,r)}\setminus\{z_0\}$. Niech

$$\gamma(t)=z_0+re^{it},\ t\in[0,2\pi],\quad \Gamma=f\circ\gamma.$$

Wówczas $0\notin\Gamma^*$.

Niech W będzie składową spójną $\mathbb{C}\setminus\Gamma^*$ zawierającą 0 i $V=D(z_0,r)\cap f^{-1}(W)$.



V, W – zbiory otwarte

$\mathrm{Ind}_\Gamma(0)=m$ (z pop. tw., f ma zero krotności m w z_0 i nie ma innych zer w $D(z_0,r)$).

Z własności indeksu: $\mathrm{Ind}_\Gamma(w)=m$ dla $w\in W$.

Z pop. twierdzenia $(f-w)$ ma dokładnie m zer w $D(z_0,r)$ (licząc krotności).

Te zera wszystkie leżą w zbiorze V.

Jeśli $w\neq 0$, to te zera funkcji $(f-w)$ są różne od z_0, a więc są jednokrotne, bo $f'\neq 0$ na $D'(z_0,r)$, a to znaczy, że $\forall_{w\in W\setminus\{0\}}$ istnieje dokł. m różnych punktów $z_1,\dots,z_m\in V$ t.że $f(z_j)=w$.

Stąd $f(V)\supset W$, przeciwna inkluzja wynika z tego, że $V\subset f^{-1}(W)$.

∎