$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-2a\cos t+a^2} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}\,dt}{\left(1-2a\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}+a^2\right)ie^{it}} = \left\{ \begin{array}{l} \gamma(t)=e^{it},\ t\in[0,2\pi] \\ \gamma'(t)=ie^{it} \\ e^{-it}=\frac{1}{e^{it}} \end{array} \right.$$

$$= \underbrace{\int_\gamma \frac{dz}{\left(1-2a\frac{z+\frac{1}{z}}{2}+a^2\right)iz}} = \frac{1}{i}\int_\gamma \frac{dz}{z-az^2-a+a^2z} =$$

$$= \frac{1}{i}\int_\gamma \frac{1\cdot dz}{\underbrace{-az^2+(a^2+1)z-a}_{f(z)}} = \left\{ \begin{array}{l} f(z)=\frac{1}{-az^2+(a^2+1)z-a}=\frac{1}{-a(z-a)(z-\frac{1}{a})} \\ \text{Załóżmy, że } |a|>1. \text{ Bieguny są w } a,\ \frac{1}{a} \text{ rzędu } 1. \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{i}\,2\pi i\cdot\left(\operatorname{Res}(f,a)\cdot\underbrace{\operatorname{Ind}_\gamma(a)}_{=0} + \operatorname{Res}\left(f,\frac{1}{a}\right)\underbrace{\operatorname{Ind}_\gamma\left(\frac{1}{a}\right)}_{=1}\right) =$$

$$= 2\pi \lim_{z\to\frac{1}{a}} f(z)\left(z-\frac{1}{a}\right) = 2\pi \lim_{z\to\frac{1}{a}} \frac{1}{-a(z-a)} = 2\pi\frac{1}{-a(\frac{1}{a}-a)} = \frac{2\pi}{a^2-1}.$$

Inny sposób zapisu:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-2a\cos t+a^2} = \left\{ \begin{array}{l} z=e^{it},\ t\in[0,2\pi] \\ dz=ie^{it}\,dt=iz\,dt \\ \frac{dz}{iz}=dt \\ \cos t=\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}=\frac{z+\frac{1}{z}}{2} \end{array} \right\} = \underbrace{\int_\gamma \frac{\frac{dz}{iz}}{1-2a\frac{z+\frac{1}{z}}{2}+a^2}}$$

Tw. (o odwzorowaniu otwartym)

Jeśli $f \in H(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ – obszar, to $f = \text{const.}$ lub f jest odwzorowaniem otwartym, tj. obrazy zbiorów otwartych są otwarte.

Dd. Zał. że $f \neq \text{const.}$ Weźmy $G \subset \Omega$ otwarty,

$f(G) \ni w_0$, niech $z_0 \in G$ t. że $f(z_0) = w_0$

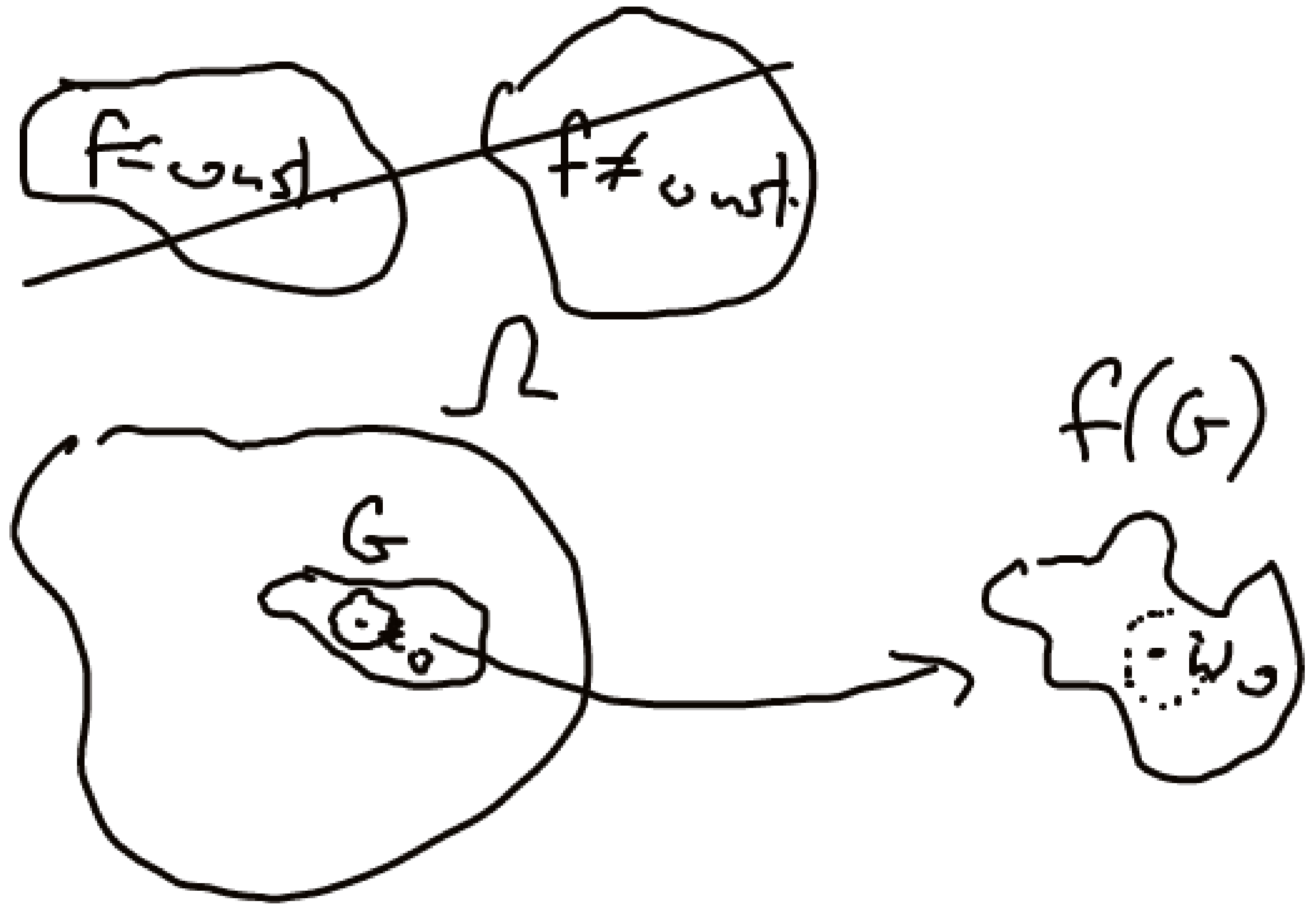
Zastosujmy tw. 91 do obszaru $\tilde{\Omega} = D(z_0, r) \subset G$.

Otrzymujemy, że istnieją zbiory otwarte V, W t. że

$z_0 \in V \subset \tilde{\Omega}$, $W = f(V)$

$z_0 \in V \subset G$ $\quad w_0 \in W = f(V) \subset f(G)$

Zatem w_0 należy do $f(G)$ wraz z otoczeniem W. $\boxtimes$



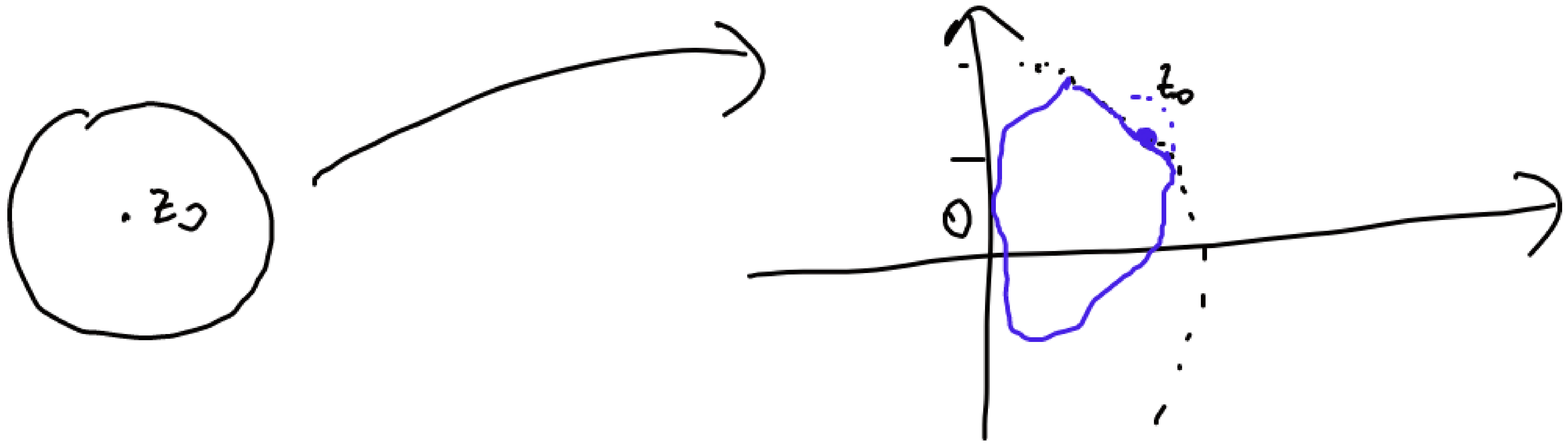
Tw. (zasada maksimum modułu)

Jeśli $f \in H(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ - obszar, i $|f|$ ma lokalne maksimum w Ω, to $f = \text{const}$.

D-d. Zał. nie wprost, że $f \neq \text{const}$. Wtedy z poprz. tw. f jest odwzorowaniem otwartym.

Z założenia istnieje $D(z_0, r) \subset \Omega$ taki, że $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ dla $z \in D(z_0, r)$.

To jest sprzeczność z tym, że zbiór $f(D(z_0, r))$ jest otwarty.



$\boxtimes$

Tw. (o odwzorowaniu odwrotnym)

Jeśli $f \in H(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ – obszar, f jest 1-1, to wówczas $f' \neq 0$ na Ω, funkcja odwrotna $f^{-1} \in H(f(\Omega))$ i $(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)}$, gdzie $f(z) = w$.

Dd. Zał. nie wprost, że $f'(z_0) = 0$. Niech $f(z_0) = w_0$. wówczas funkcja $(f - w_0)$ ma w z_0 zero krotności ≥ 2.
Z tw. 91 wynika, że $(f - w_0)$ nie jest 1-1, sprzeczność.
Z tw. o odwz. otwartym wynika, że f^{-1} jest ciągła (bo $(f^{-1})^{-1}(V) = f(V)$ – otwarte dla V – otw.).

Niech $w = f(z)$.

$$\frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} \longrightarrow \frac{1}{f'(z_0)}$$

gdy $w \to w_0$, to z cg. f^{-1}: $\underset{z}{\underset{\shortparallel}{f^{-1}(w)}} \to \underset{z_0}{\underset{\shortparallel}{f^{-1}(w_0)}}$. $\boxtimes$

Tw. $f \in H(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ - obszar, $z_0 \in \Omega$, $w_0 = f(z_0)$, $f'(z_0) \neq 0$.

Wówczas istnieją zbiory otwarte V, W takie, że

$z_0 \in V$, $w_0 \in W$, $f(V) = W$, $f\restriction_V$ jest 1-1

Ponadto $(f\restriction_V)^{-1} \in H(W)$.

Dd.

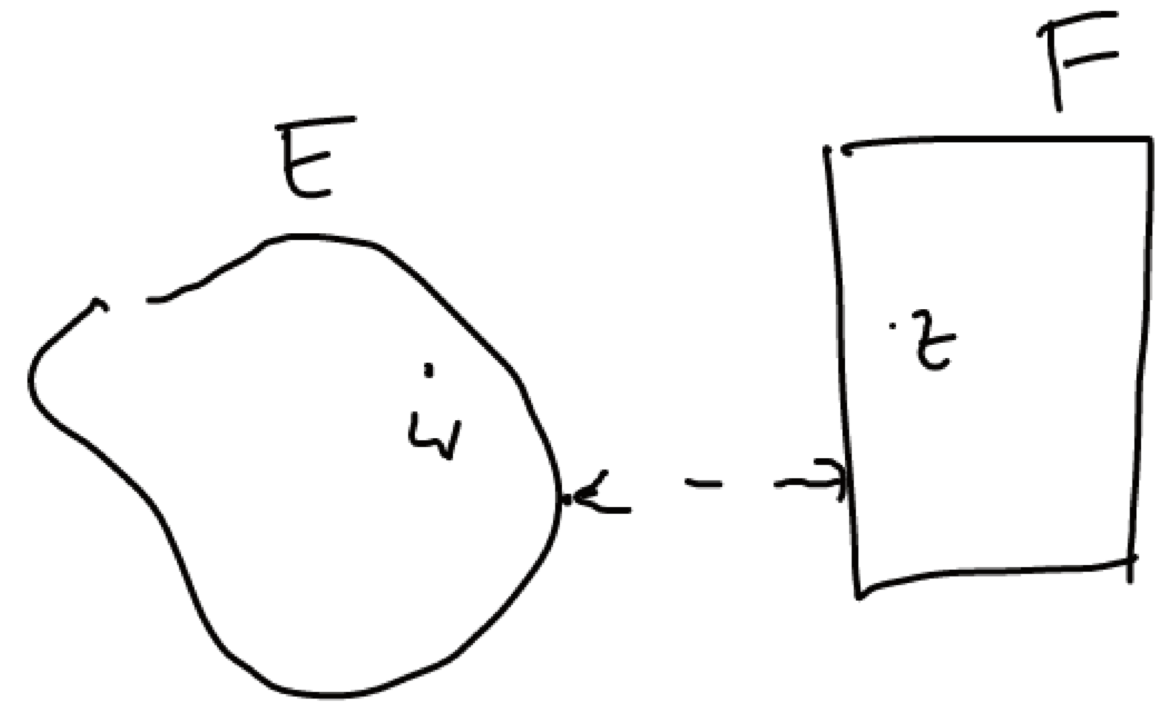
Pierwsza część wynika bezpośrednio z tw. 91.

Reszta wynika z poprzedniego twierdzenia. $\boxtimes$

Dla $E,F\subset\mathbb{C}$ określamy

$$\rightarrow \operatorname{dist}(z,E)=\inf_{w\in E}|z-w| \qquad \operatorname{dist}(E,F)=\inf_{\substack{w\in E\\ z\in F}}|w-z|$$

Lemat Jeśli $F\subset\mathbb{C}$ jest domknięty, a $K\subset\mathbb{C}$ zwarty, $K\cap F=\emptyset$, to $\operatorname{dist}(K,F)>0$.



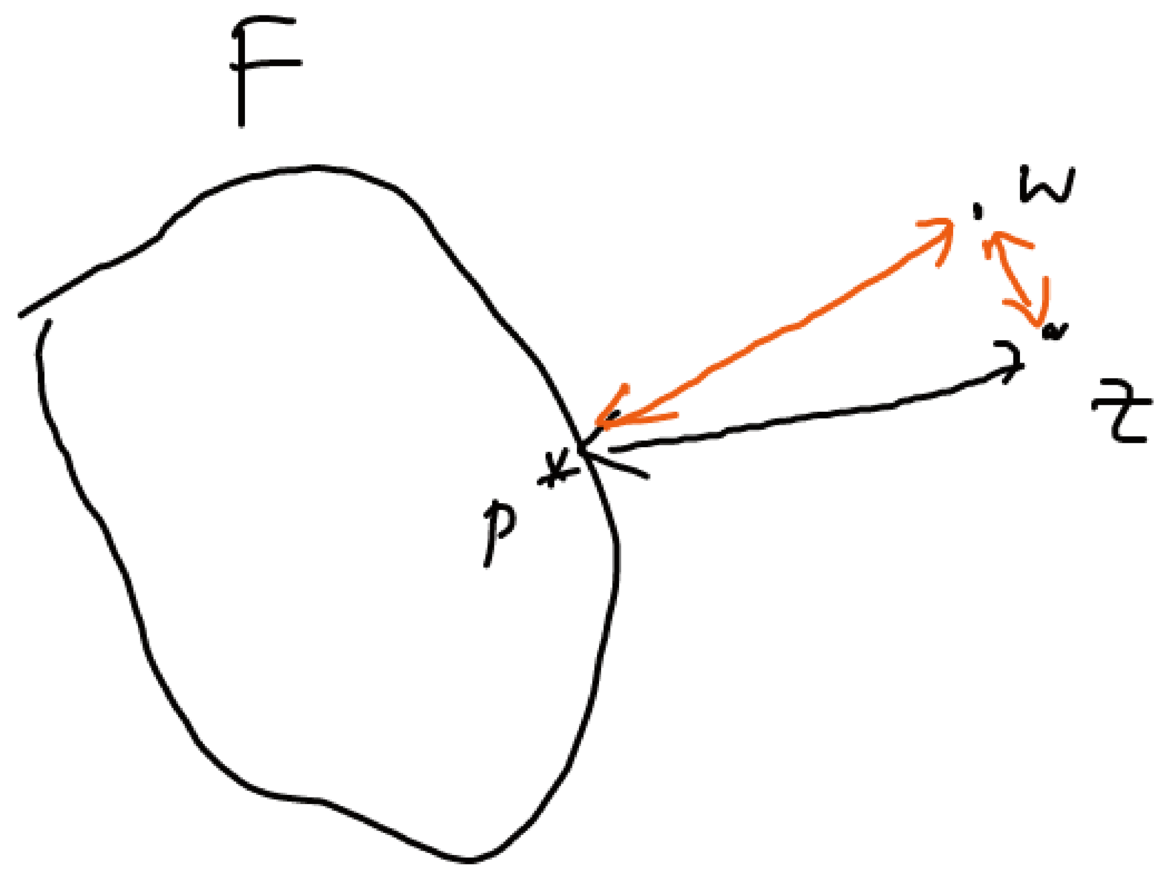
D-d. Niech $z,w\in\mathbb{C}$. Załóżmy, że $\operatorname{dist}(z,F)\geq\operatorname{dist}(w,F)$. Wówczas

$$|\operatorname{dist}(z,F)-\operatorname{dist}(w,F)|=\operatorname{dist}(z,F)-\operatorname{dist}(w,F)=$$

$$=\inf_{p\in F}|z-p|-\operatorname{dist}(w,F)\leq$$

$$\leq\inf_{p\in F}\left(|z-w|+|w-p|\right)-\operatorname{dist}(w,F)=$$

$$=|z-w|+\underbrace{\inf_{p\in F}|w-p|}_{\operatorname{dist}(w,F)}-\operatorname{dist}(w,F)=|z-w|.$$



Przez symetrię $z\Leftrightarrow w$ otrzymujemy, że

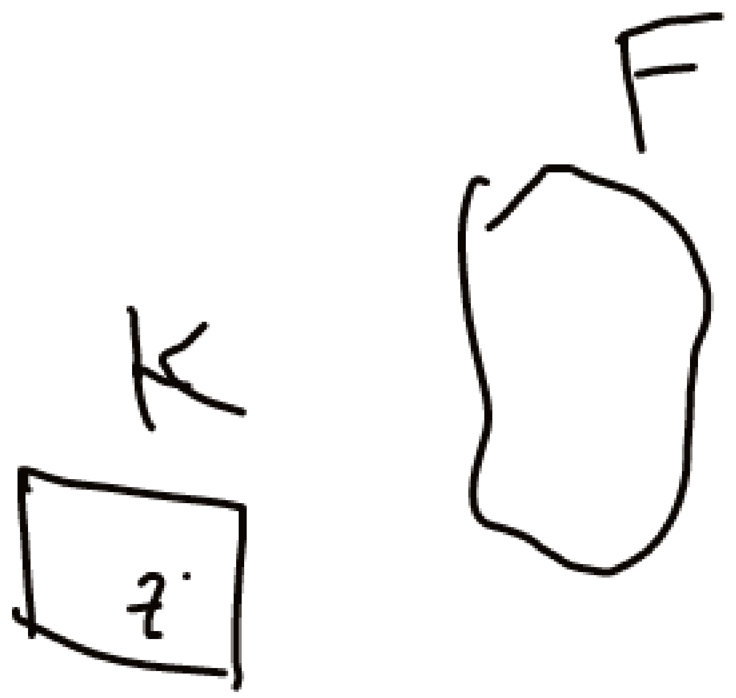
$$|\operatorname{dist}(z,F)-\operatorname{dist}(w,F)|\leq|z-w|, \quad z,w\in\mathbb{C}$$

(nie korzystaliśmy na razie z domkniętości F).

- Uzasadnimy nie wprost, że jeśli $z\notin F$, to $\operatorname{dist}(z,F)>0$.
Gdyby $\operatorname{dist}(z,F)=0$, to istniałby ciąg $w_n\in F$ taki, że $|z-w_n|\to 0$.
To oznacza, że $w_n\to z\in\bar{F}=F$, ↯.

Niech $h(z) = \mathrm{dist}(z, F)$.

Pokażmy, że h jest ciągła oraz $h > 0$ na K.



Zatem $h(K)$ jest zwartym podzbiorem $(0,\infty)$.

$$h(K) \subset \bigcup_{t>0} (t,\infty) = (0,\infty)$$

Ze zwartości można wybrać podpokrycie skończone:

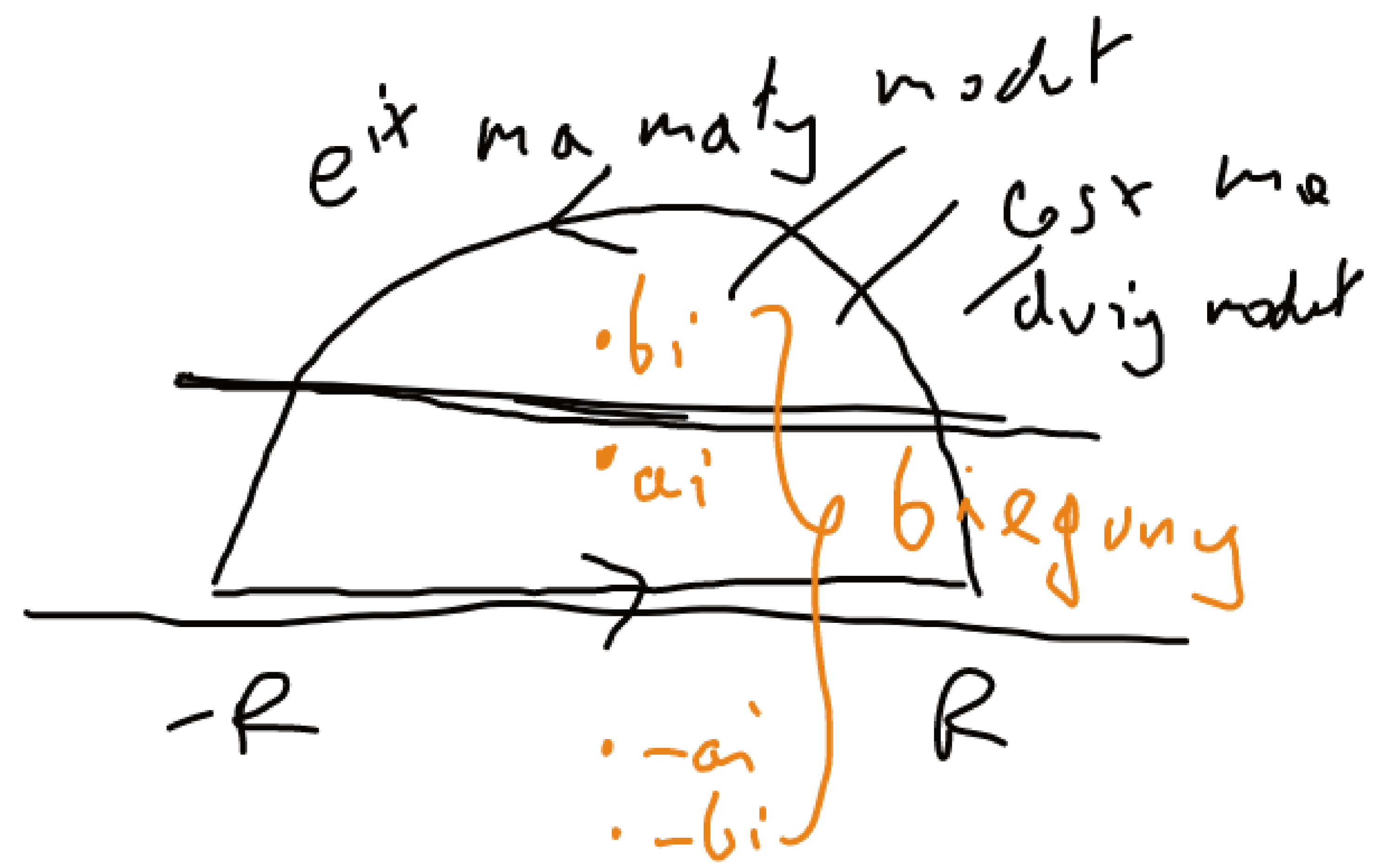
$$h(K) \subset \bigcup_{k=1}^{N} (t_k, \infty) = (t_1,\infty), \quad \text{gdzie } 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N.$$

Czyli $h(z) > t_1 > 0$ dla $z \in K$.

To oznacza, że $\mathrm{dist}(K,F) = \inf\limits_{z\in K} \mathrm{dist}(z,F) = \inf\limits_{z\in K} h(z) \geq t_1 > 0$. $\boxtimes$

Przykład Policzymy, pożytkowo dla $a,b>0$, $a\neq b$ całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x\, dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{e^{ix}\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}_{f(x)}$$



$$\gamma = \langle -R,R\rangle + \gamma_R, \quad \gamma_R(t)=Re^{it},\ t\in[0,\pi]$$

Z lematu Jordana wynika, że

$$\to \int_{\gamma_R}\frac{e^{ix}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$z=a+ib$, $a,b\in\mathbb{R}$

$$|e^{iz}| = |e^{ia-b}| = e^{-b}$$

$$\int_{\langle -R,R\rangle}\frac{e^{ix}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx \xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx \quad \leftarrow$$

Z drugiej strony, dla $R>a,b$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}(f,ai)+\mathrm{Res}(f,bi)\right) =$$

$$2\pi i\left(\lim_{x\to ai} f(x)(x-ai) + \lim_{x\to bi} f(x)(x-bi)\right) = 2\pi i\left(\frac{e^{-a}}{2ai(b^2-a^2)} + \frac{e^{-b}}{2bi(a^2-b^2)}\right) =$$

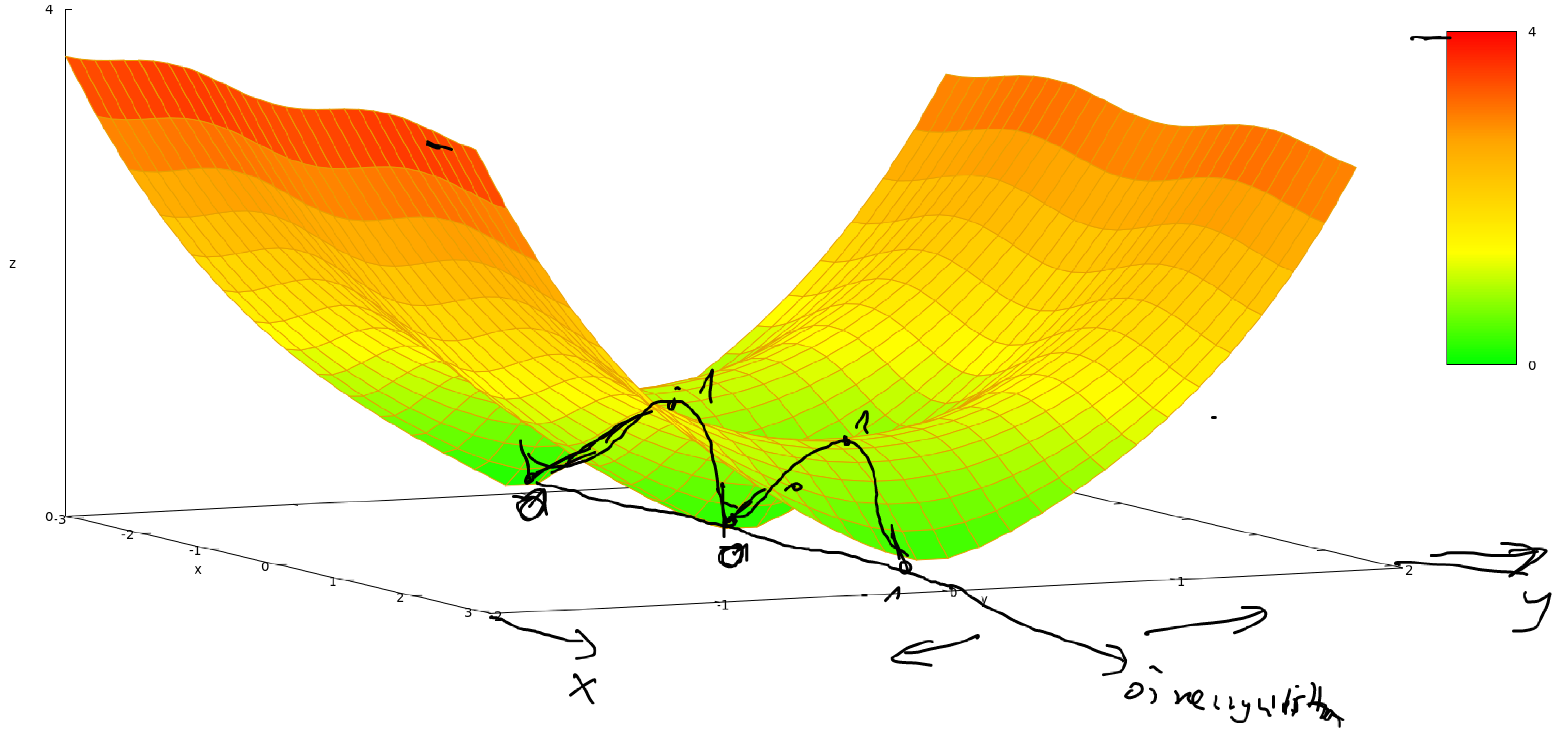
$$\mathrm{Res}(f,ai) = \lim_{x\to ai} f(x)(x-ai) = \lim_{x\to ai}\frac{e^{ix}\cdot\cancel{(x-ai)}}{\cancel{(x-ai)}(x+ai)(x^2+b^2)} = \frac{e^{-a}}{2ai(-a^2+b^2)}$$

$$= \pi\left(\frac{e^{-a}}{(b^2-a^2)a} - \frac{e^{-b}}{(b^2-a^2)b}\right) = \frac{\pi}{b^2-a^2}\left(\frac{e^{-a}}{a}-\frac{e^{-b}}{b}\right).$$

$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$|\sin(x + yi)|$

abs(sin(%i*y+x))



A co np. gdy $a \notin \mathbb{R}$?

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \underbrace{\frac{\pi}{b^2-a^2}\left(\frac{e^{-a}}{a} - \frac{e^{-b}}{b}\right)}_{=: g(a)}, \quad a,b>0, \ a \neq b$$

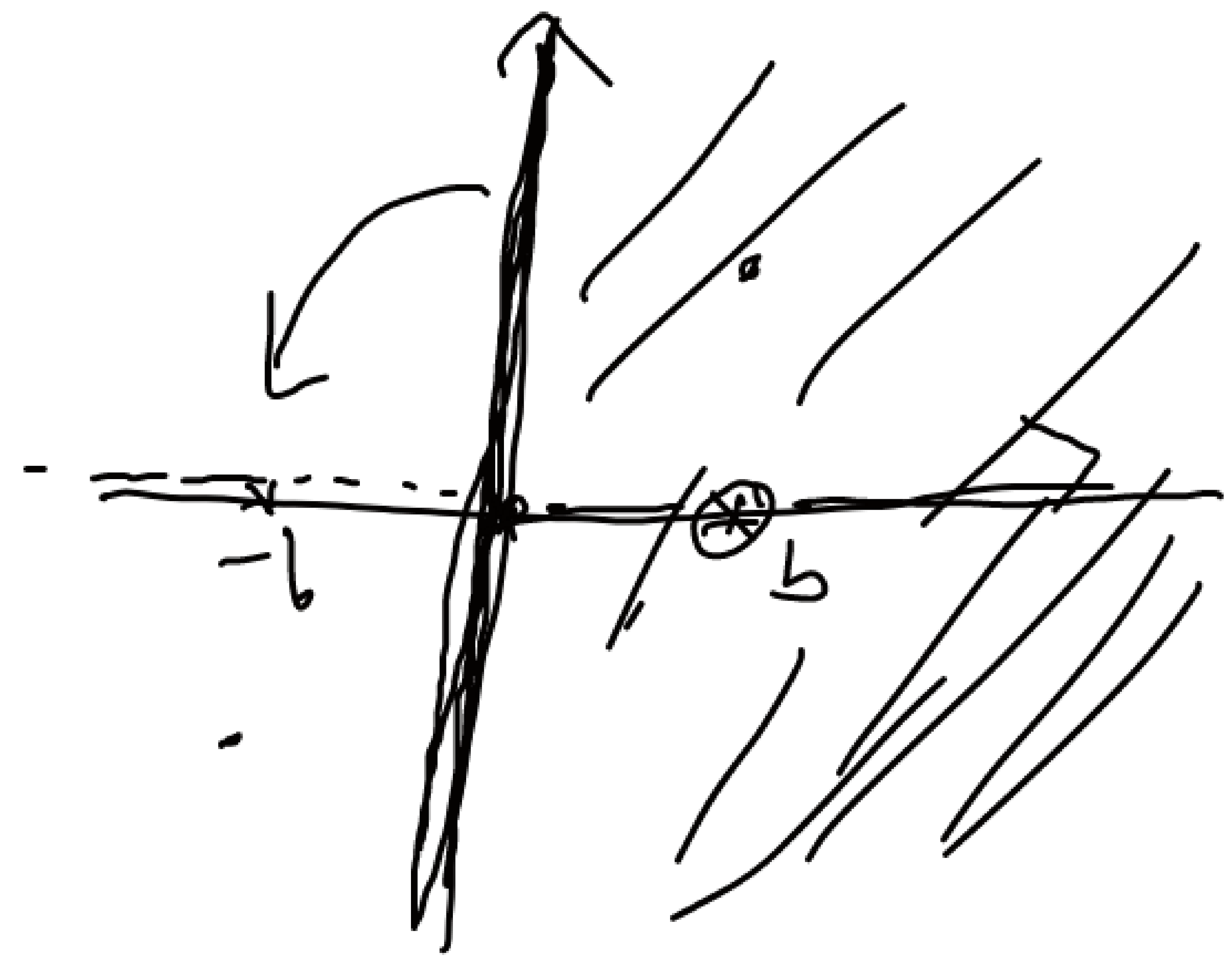
chcemy: $-a^2 \notin [0,\infty)$

$a^2 \notin (-\infty, 0]$

(bo inaczej całka potencjalnie rozbieżna)

Będziemy rozważać

$a \in \Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$.



Przy ustalonym $b>0$, funkcja

$$g(a) = \frac{\pi}{b^2-a^2}\left(\frac{e^{-a}}{a} - \frac{e^{-b}}{b}\right)$$

jest holomorficzna na $\mathbb{C}\setminus\{0, b, -b\}$,

czyli w szczególności na $\Omega \setminus \{b\}$.

Z tw. Morery można uzasadnić (15 V), że

również

$$h(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$$

jest holomorficzna na Ω, czyli też na $\Omega\setminus\{b\}$.

Czyli $h, g \in H(\Omega\setminus\{b\})$ oraz $h(a) = g(a)$ dla $a>0, a \neq b$

Z tw. o zerach: $h(a) = g(a)$ dla $a \in \Omega\setminus\{b\}$.

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \, dx}_{a^2 = 1+i} = \frac{\pi}{b^2-a^2}\left(\frac{e^{-a}}{a} - \frac{e^{-b}}{b}\right), \quad b>0, \ \operatorname{Re} a > 0, \ a \neq b$$