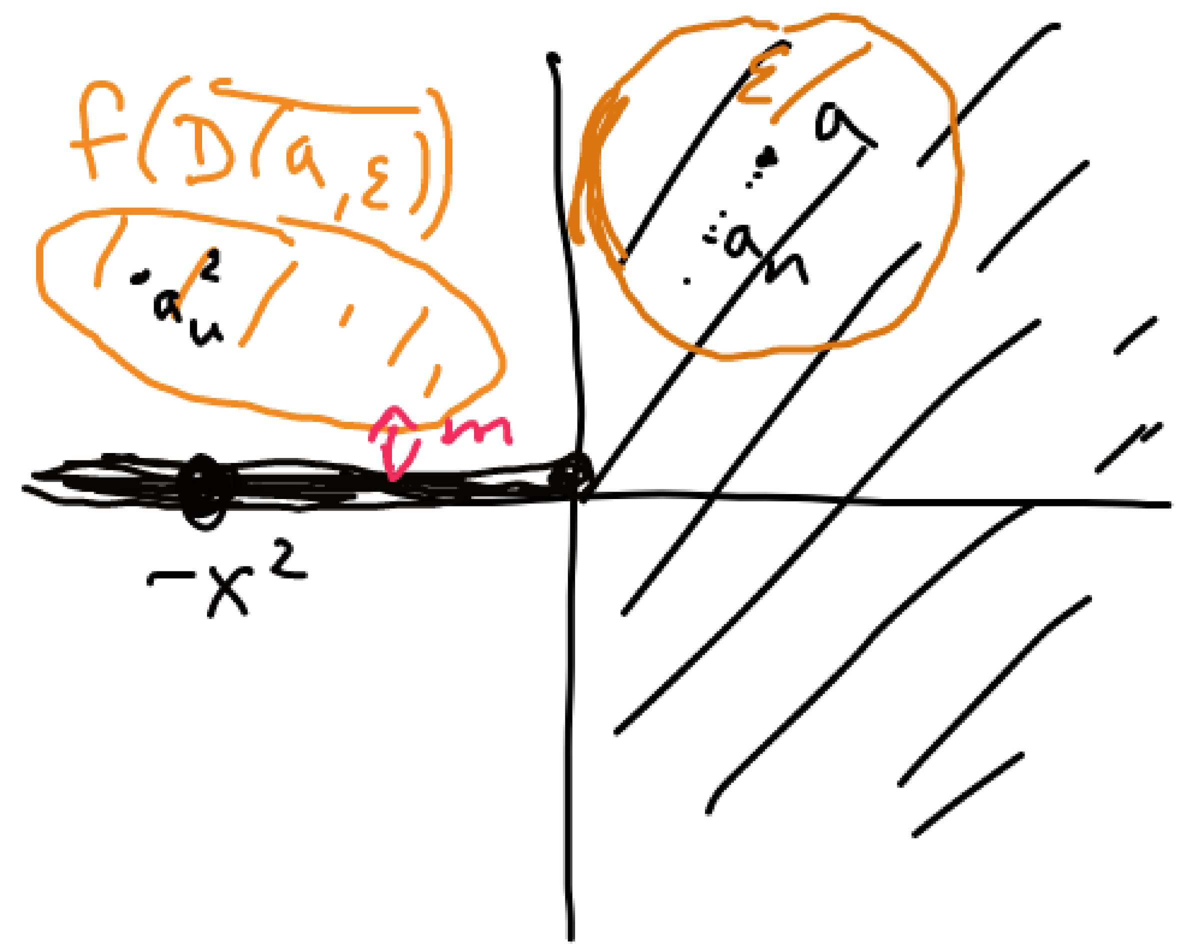
$$h(a)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, \quad a\in\Omega=\{z: \mathrm{Re}\, z>0\}, \quad b>0 \text{ – ustalone}$$

1) ciągłość h: Niech $a\in\Omega$, $a_n\in\Omega$, $a_n\to a$.



Niech $\varepsilon>0$ takie, że $\overline{D(a,\varepsilon)}\subset\Omega$. Dla dużych n zachodzi $a_n\in\overline{D(a,\varepsilon)}$. $f(z):=-z^2$, zbiór $f(\overline{D(a,\varepsilon)})$ jest zwarty i $\subset \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$

Zatem z lematu $m:=\operatorname{dist}\left(f(\overline{D(a,\varepsilon)}),(-\infty,0]\right)>0$

Wobec tego dla dużych n i $x\in\mathbb{R}$:

$$|x^2+a_n^2| = |a_n^2-(-x^2)| \ge \operatorname{dist}\Big(\underbrace{f(\overline{D(a,\varepsilon)})}_{\ni a_n}, \underbrace{(-\infty,0]}_{\ni -x^2}\Big) = m>0,$$

Zatem

$$\left|\frac{1\cdot\cos x}{(x^2+a_n^2)(x^2+b^2)}\right| \le \underbrace{\frac{1}{m}\,\frac{1}{b^2+x^2}}_{\text{nie zależy od } n} \in L^1(\mathbb{R}) \quad \text{(jako f. zmiennej } x\text{)}$$

Z tw. Lebesgue'a o zb. ogr.

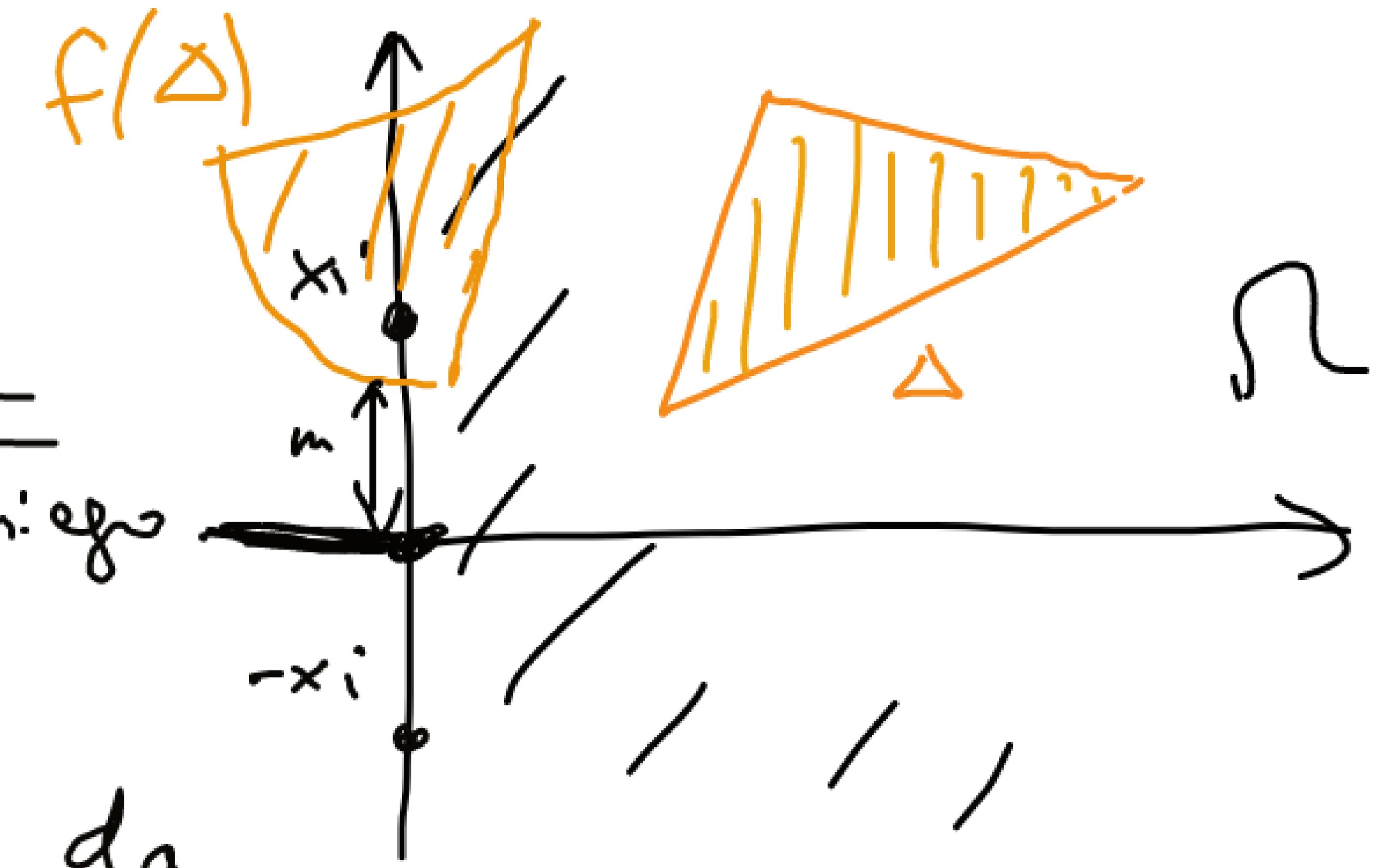
$$\lim_{n\to\infty} h(a_n) = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+a_n^2)(x^2+b^2)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{\cos x}{(x^2+a_n^2)(x^2+b^2)}\,dx = h(a).$$

2) Całki wzdłuż brzegów trójkątów $\subset\Omega$ są zero ?

Ozn. γ – droga, $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$, $f:\gamma^*\to\mathbb{C}$, ciągła, piszemy

$$\int_\gamma f(z)\,|dz| := \int_a^b f(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt$$

Niech $\Delta \subset \Omega$ będzie dow. trójkątem.



$$\int_{\partial\Delta} h(a)\,da = \int_{\partial\Delta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x\,dx}{\boxed{(x^2+a^2)}(x^2+b^2)}\,da \overset{\text{tw. Fubiniego}}{=\!=}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\partial\Delta}\frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,da\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+b^2}\underbrace{\int_{\partial\Delta}\frac{da}{x^2+a^2}}_{=0,\ \text{bo } g(a)=\frac{1}{x^2+a^2}\in H(\underbrace{\mathbb{C}\setminus\{\pm xi\}}_{\supset\Delta})}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} 0\,dx = 0$$

Spr. zał. tw. Fubiniego:

$$\int_{\partial\Delta}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\right|dx\,|da| < \infty \ ?$$

Niech $f(z)=z^2$, $f(\Delta)$ - zb. zwarty $\subset \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$

Zatem

$$m_2 := \operatorname{dist}(f(\Delta), (-\infty,0]) > 0$$

oraz dla $a\in\Delta$, $x\in\mathbb{R}$:

$$|a^2+x^2| = |a^2-(-x^2)| \geq \operatorname{dist}\big(\underbrace{f(\Delta)}_{a^2}, \underbrace{(-\infty,0]}_{\ni -x^2}\big) = m_2 > 0$$

czyli

$$\int_{\partial\Delta}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\right|dx\,|da| \leq \underbrace{\int_{\partial\Delta}\frac{1}{m_2}\,|da|}_{=\ell(\partial\Delta)\cdot\frac{1}{m_2}}\cdot\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+b^2}\,dx}_{<\infty} < \infty.$$

⊠

Przykład

$$\int_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{x(x^2+1)} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x\,dx}{x(x^2+1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}(e^{ix}-1)\,dx}{x(x^2+1)} \cancel{=} \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\overset{=:f(x)}{\boxed{\frac{e^{ix}-1}{x(x^2+1)}}}dx}_{\text{rozbieżna!}}$$

$\gamma_R(t)=Re^{it},\ t\in[0,\pi]$

po odjęciu „1" równość już zachodzi

bo $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}(e^{ix})\,dx}{\dots}$ – rozbieżna!

osobliwość rzędu $\frac{1}{x}$ w zerze!

$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx := \int_{\mathbb{R}}\mathrm{Re} f(x)\,dx + i\int_{\mathbb{R}}\mathrm{Im} f(x)\,dx$, o ile całki po prawej mają sens

$\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}}\mathrm{Im} f(x)\,dx$

$$(*)\quad \int_{\langle -R,R\rangle+\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i\cdot \mathrm{Res}(f,i) \leftarrow$$

(dla $R>1$)

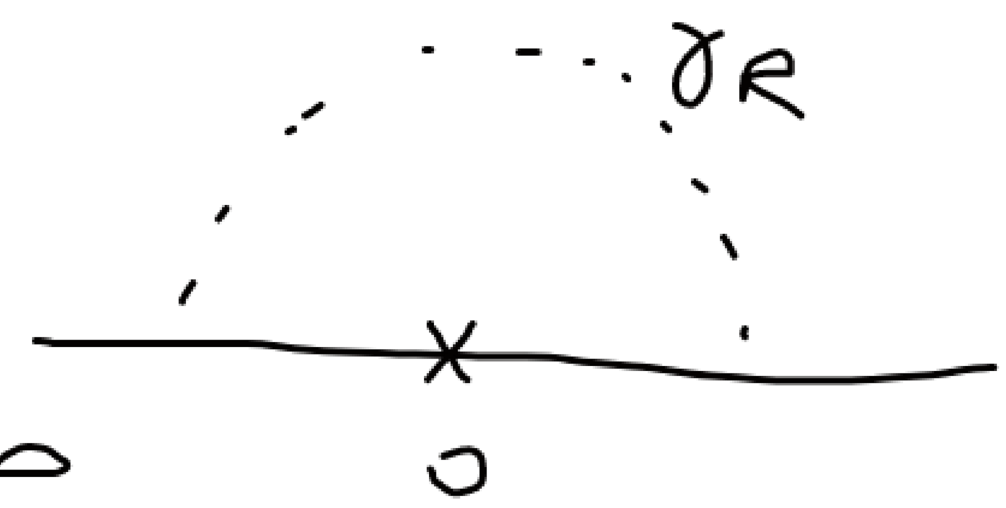
f ma w 0 osobliwość pozorną

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{e^{iz}-1}{z(z^2+1)}, & z\in\mathbb{C}\setminus\{0,\pm i\}\\ i, & z=0\end{cases}$$

$f\in H(\mathbb{C}\setminus\{\pm i\})$ (z tw. o klasyfikacji osobliwości)

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^{iz}-1}{z-0} = (e^{iz})'\big|_{z=0} = ie^{iz}\big|_0 = i$$

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}-1}{z(z^2+1)}\,dz = \underbrace{\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}\,dz}{z(z^2+1)}}_{(i)} - \underbrace{\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z(z^2+1)}}_{(ii)}$$



(i) $\xrightarrow{R\to\infty} 0$ (lemat Jordana)

(ii) $\xrightarrow{R\to\infty} 0$ (bo st. mianownika $\geq$ st. licznika $+2$)

Dokładniej:

ad (i) $g(z) = \dfrac{1}{z(z^2+1)} \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0$, spełnione są zał. lematu Jordana

ad (ii)
$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z(z^2+1)}\right| \leq \int_{\gamma_R} \frac{1}{\underbrace{|z|}_{=R}\cdot\underbrace{|z^2+1|}_{\geq R^2-1}}\,|dz| \underset{R>1}{\leq} \frac{1}{R(R^2-1)} \int_{\gamma_R} |dz| = \frac{1}{\cancel{R}(R^2-1)}\,\pi\cancel{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

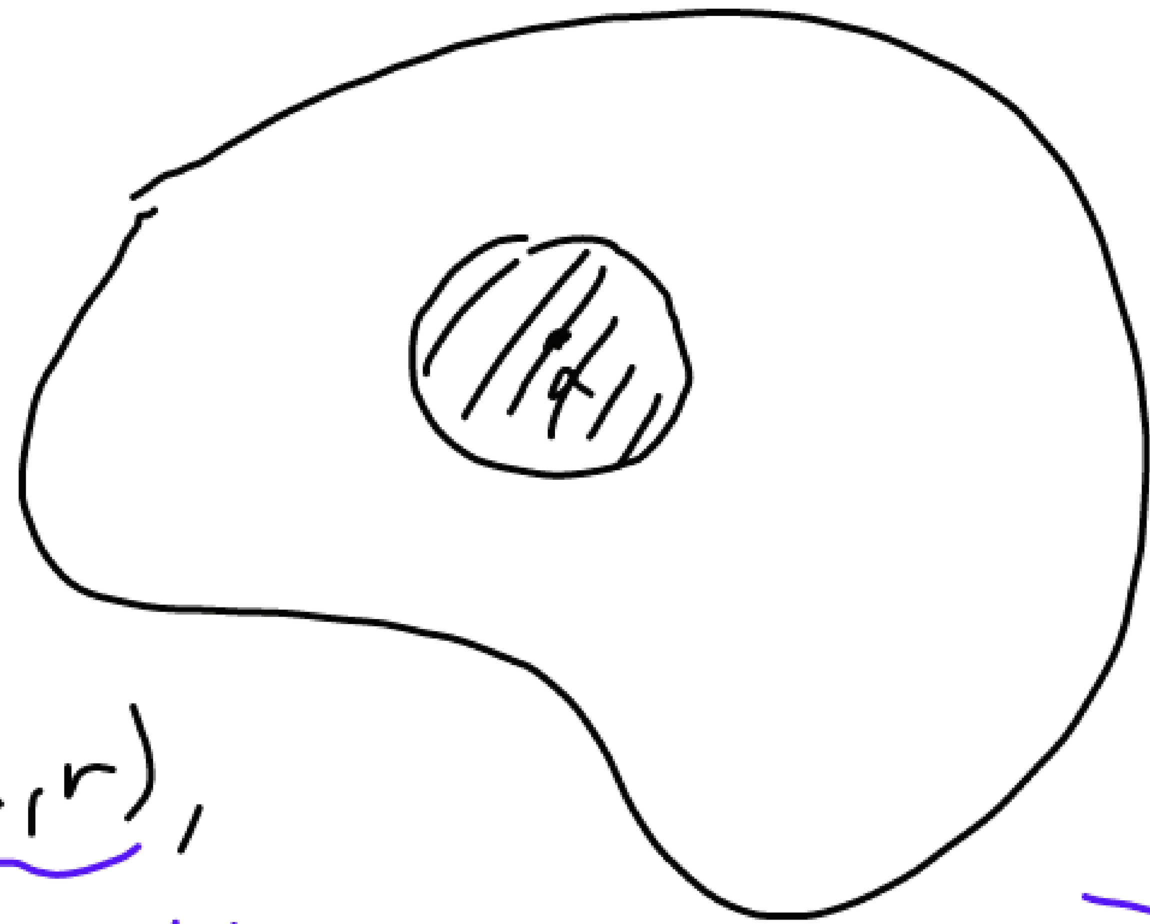
$$\mathrm{Res}(f,i) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\cancel{(z-i)}\,\frac{e^{iz}-1}{z\cancel{(z-i)}(z+i)} = \frac{e^{-1}-1}{i\cdot 2i} = \frac{e^{-1}-1}{-2}$$

Przechodzimy z $R\to\infty$ we wzorze (*):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx + 0 = 2\pi i \cdot \frac{e^{-1}-1}{-2} = \pi i\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

Odp. $= \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(\pi i\left(1-\frac{1}{e}\right)\right) = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$

⊠



Tw. (Rouché)

Niech $f, g \in H(\Omega)$, $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ oraz

$$|f(z)-g(z)| < |f(z)| \quad \text{dla } |z-a|=r.$$

Wówczas funkcje f, g mają tę samą liczbę zer w $\underbrace{D(a,r)}$, licząc krotności.

równie dobrze można wziąć $\overline{D(a,r)}$, ze względu na uwagę

Uwaga: Jeśli $|f(z)-g(z)| < |f(z)|$, to $f(z) \neq 0$, $g(z) \neq 0$.

D-d. Niech $Z(f), Z(g)$ oznaczają liczby zer funkcji f, g (odpowiednio) w $D(a,r)$ (licząc krotności). Niech $\gamma(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Wtedy z tw. 8.9)

$$Z(f) = \operatorname{Ind}_{f\circ\gamma}(0), \qquad Z(g) = \operatorname{Ind}_{g\circ\gamma}(0).$$

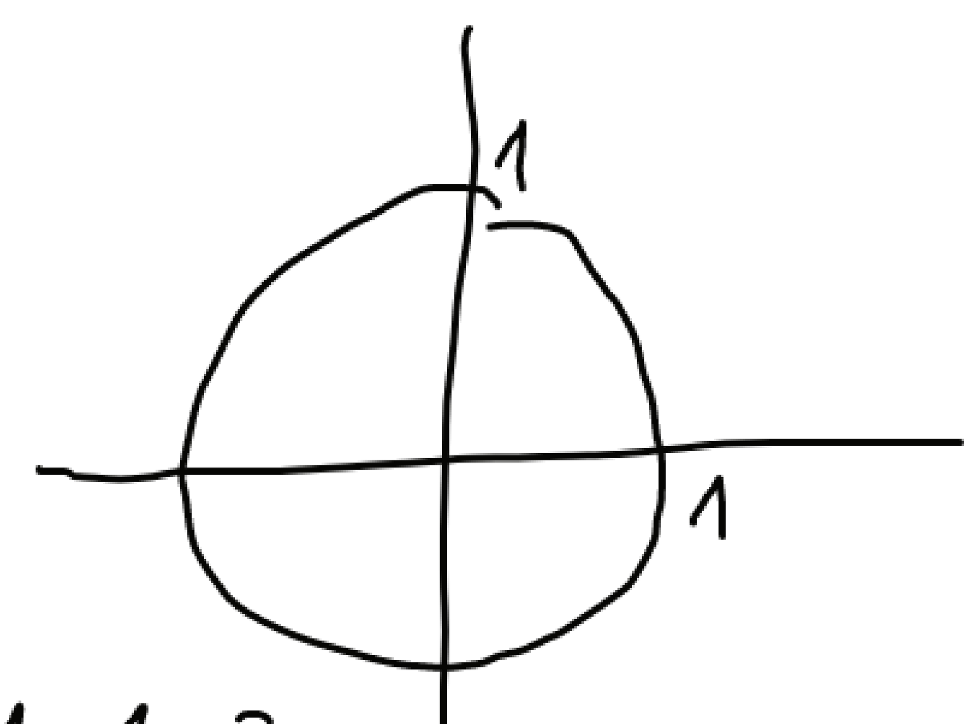
Powyższe indeksy są takie same na mocy ćwiczenia 57:

$$|g\circ\gamma(t) - f\circ\gamma(t)| < |0 - f\circ\gamma(t)|, \quad t \in [0, 2\pi]. \qquad \boxed{\times}$$

Np. Ile pierwiastków w $\overline{D(0,1)}$ ma $f(z) = z^4 - 5z + 1$?

Dobieramy $g(z) = -5z$ (można było wziąć $g(z) = -5z+1$)

$$|f(z)-g(z)| = |z^4+1| \leq 2 < 3 \leq |f(z)| \qquad |z|=1$$



Spełnione są zał. tw. Rouché.

$$|f(z)| \geq |-5z| - |z^4| - 1 = 5 - 1 - 1 = 3$$

Zatem f ma w $\overline{D(0,1)}$ tyle zer, ile g, czyli jedno.

Zbieżność niemal jednostajna

Def. $\Omega \subset \mathbb{C}$ - otwarty, $f_n, f : \Omega \to \mathbb{C}$.
Mówimy, że $f_n \to f$ niemal jednostajnie na Ω ($f_n \to f$ nj. na Ω),
jeśli dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \Omega$ zachodzi

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } K.$$

Uwagi:

- Jeśli $f_n \in C(\Omega)$, $f_n \to f$ nj. na Ω, to $f \in C(\Omega)$.

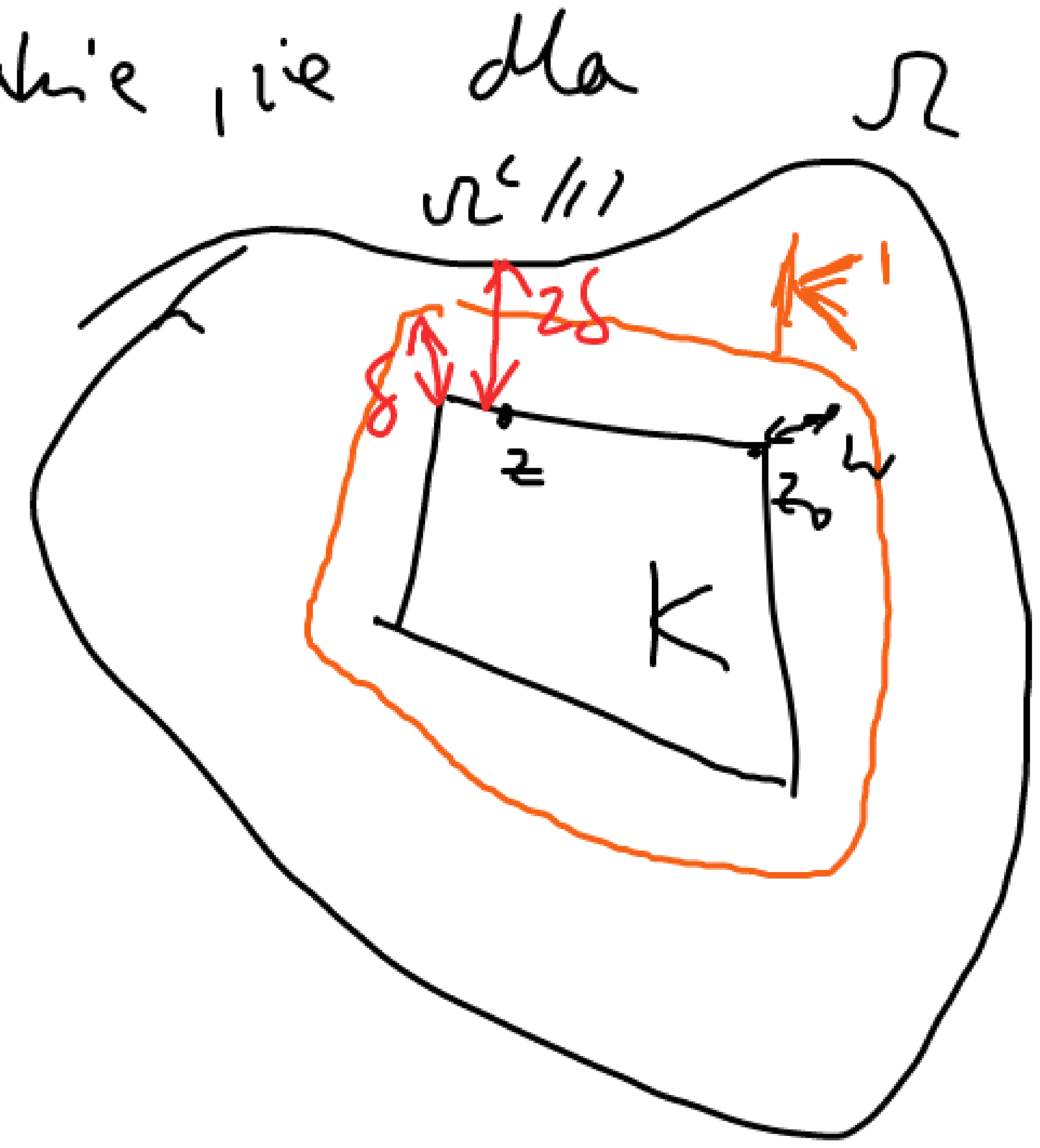
  { $\overline{D(a,\varepsilon)} \subset \Omega$, $f_n \rightrightarrows f$ na $\overline{D(a,\varepsilon)}$, a zatem $f|_{\overline{D(a,\varepsilon)}}$ jest cg.
  Stąd f ciągła w a.

- Jeśli $f_n \in H(\Omega)$, $f_n \to f$ nj. na Ω, to $f \in H(\Omega)$

  { ćwiczenie 64

Lemat. Niech $K \subset\subset \Omega$ (tzn. $K \subset \Omega$ i K-zwarty), $j \in \mathbb{N}$.
Wówczas istnieją stała c i zbiór $K' \subset\subset \Omega$ takie, że dla dowolnej funkcji $f \in H(\Omega)$ zachodzi:

$$\sup_{z\in K} |f^{(j)}(z)| \le c \cdot \sup_{z \in K'} |f(z)|$$



Dowód Niech $\delta = \operatorname{dist}(\underbrace{K}_{\text{zwarty}}, \underbrace{\Omega^c}_{\text{domknięty}})/2 > 0$

rozłączne

Niech $K' = \bigcup_{z\in K} \overline{D(z,\delta)} = \{z : \operatorname{dist}(z,K) \le \delta\}$

Z określenia δ wynika, że $\overline{D(z,\delta)} \subset \Omega$ dla $z \in K$, czyli $K' \subset \Omega$.

K' jest ograniczony, bo K jest ograniczony: $|z| \le M$ dla $z \in K$

$\Rightarrow |w| \le |w - z_0| + |z_0| \le \delta + M$ dla $w \in K'$ (i odp. z_0)

K' jest domknięty, bo jest to przeciwobraz przez funkcję cg. $\operatorname{dist}(\cdot, K)$ zbioru domkniętego $[0,\delta]$

Niech $f \in H(\Omega)$. Z nier. Cauchy'ego zastosowanej do f i dysku $D(z,\delta)$:

$$|f^{(j)}(z)| \le \frac{j!}{\delta^j} \sup_{w \in D(z,\delta)} |f(w)| \quad \Big| \sup_{z \in K}$$

$$\sup_{z\in K} |f^{(j)}(z)| \le \frac{j!}{\delta^j} \sup_{z\in K} \sup_{w \in \underbrace{D(z,\delta)}_{\subset K'}} |f(w)| \le \frac{j!}{\delta^j} \sup_{w \in K'} |f(w)|.$$

∎