Przypomnienie:

Lemat: $K \subset\subset \Omega \subset \mathbb{C}$, Ω - otwarty, $j \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \exists_c \; \exists K' \subset\subset \Omega \; \forall f \in H(\Omega)$$

$$\|f^{(j)}\|_K \leq c \, \|f\|_{K'},$$

gdzie $\|g\|_K = \sup_{z \in K} |g(z)|$.

Tw. Jeśli $f_n \in H(\Omega)$, $f_n \to f$ nj. na Ω, to wówczas dla dowolnego $k = 1, 2, \ldots$

$$f_n^{(k)} \to f^{(k)} \text{ nj. na } \Omega.$$

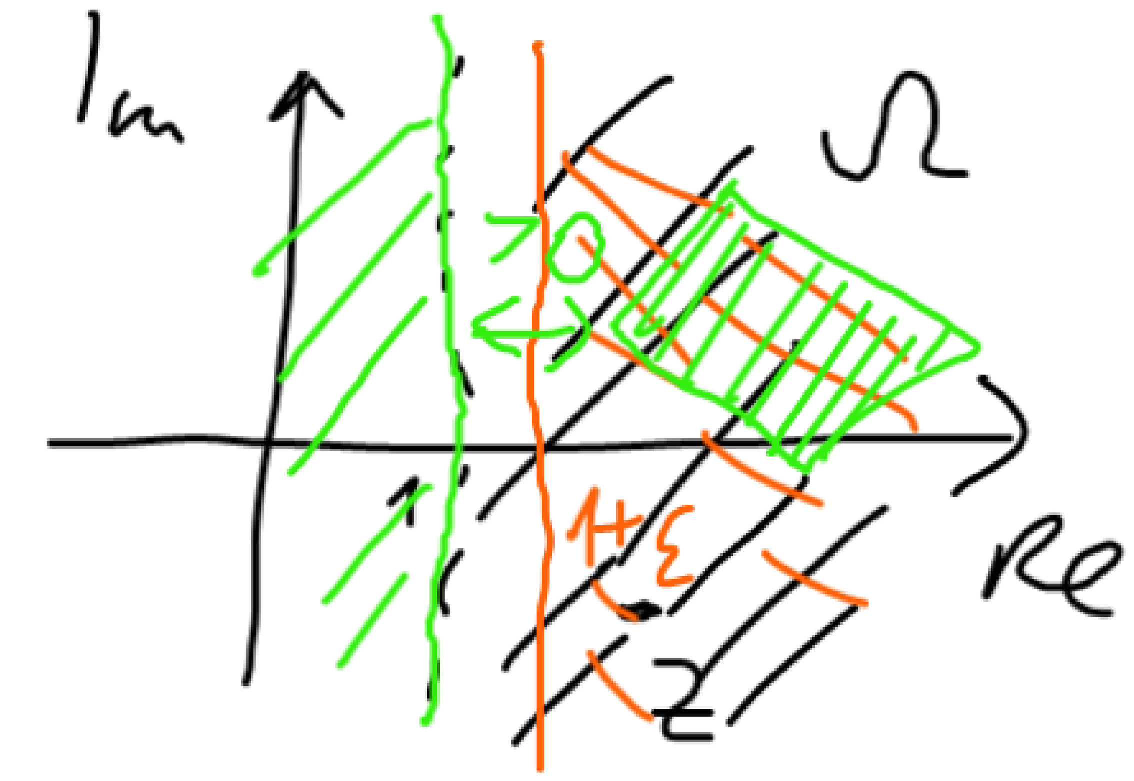
Dd. Niech $K \subset\subset \Omega$. Z poprzedniego lematu

$$\| f_n^{(k)} - f^{(k)} \|_K \leq c \| f_n - f \|_{K'} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

$\boxtimes$

Przykład. (Funkcja dzeta Riemanna)

Niech $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$. Dla $z \in \Omega$ określamy



$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\exp(z \cdot \ln n)}.$$

Dla $n \in \mathbb{N}$ funkcja $z \longmapsto \frac{1}{n^z} = \exp(-z \cdot \ln n)$ jest całkowita

$$\left|\frac{1}{n^z}\right| = \left|\exp(-z \ln n)\right| = \exp\left(-\operatorname{Re}(z \ln n)\right) = \exp(-\ln n \cdot \operatorname{Re} z) =$$
$$= \frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}}$$

Na zbiorze $\{z : \operatorname{Re} z \geqslant 1+\varepsilon > 1\}$ mamy

$$\left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}} \leqslant \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} < \infty$$

więc z kryterium Weierstrassa szereg definiujący ζ jest zbieżny jednostajnie na $\{z : \operatorname{Re} z \geqslant 1+\varepsilon\}$

Ponieważ każdy $K \subset\subset \Omega$ zawiera się w pewnej półpłaszczyźnie $\{z : \operatorname{Re} z \geqslant 1+\varepsilon\}$, to szereg def. ζ zbiega nj. na Ω.

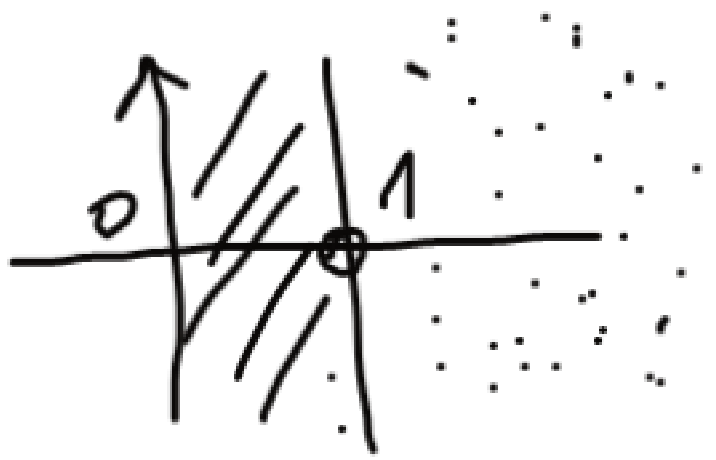
Zatem $\zeta \in H(\Omega)$, jako granica nj. zbieżnego ciągu funkcji $\in H(\Omega)$ (tym ciągiem jest ciąg sum częściowych $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^z}$).

Np. z poprzedniego twierdzenia wynika teraz, że

$$\zeta'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^z}\right)'_z = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\ln n \cdot z) \cdot (-\ln n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\ln n}{n^z}.$$

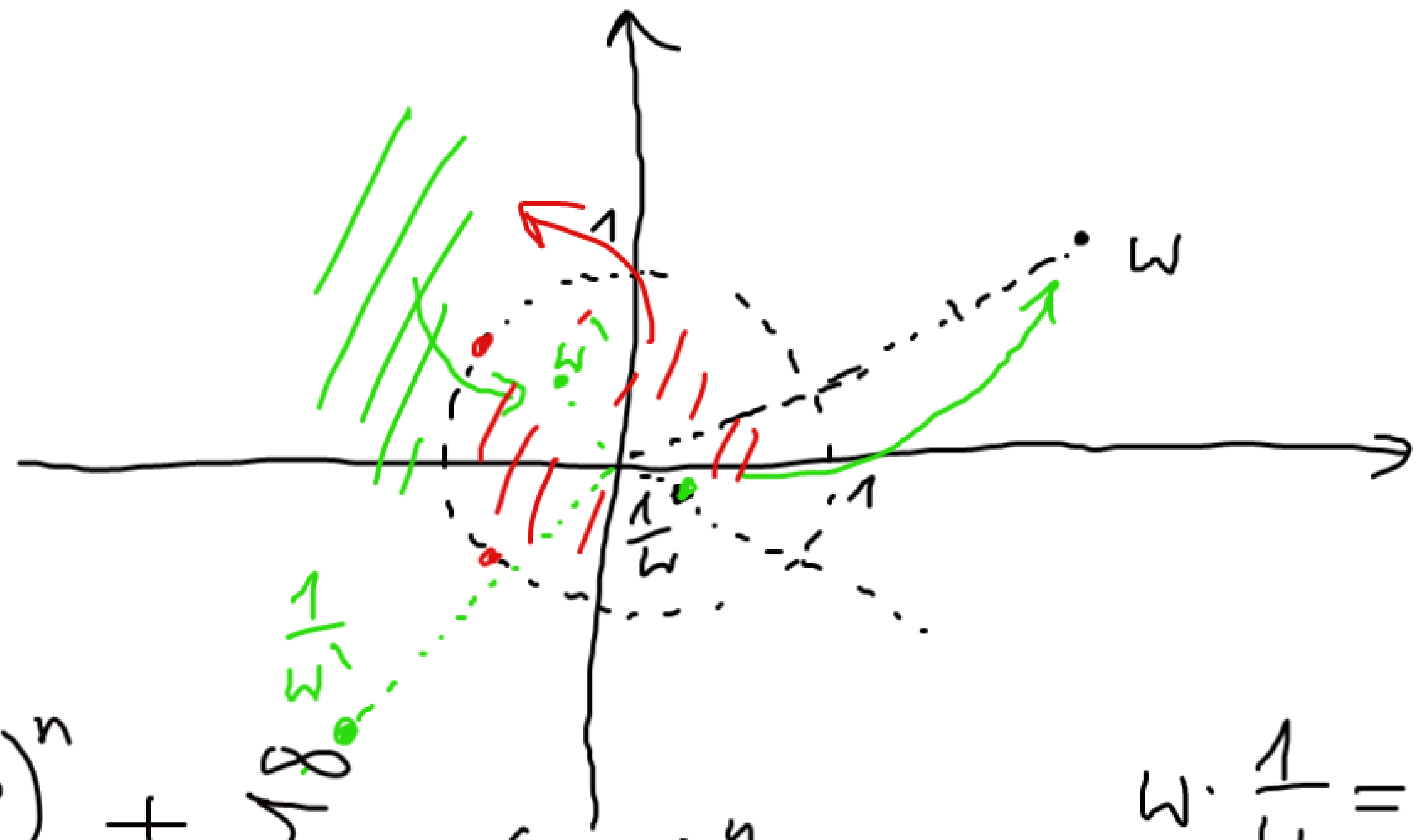
$$\boxed{\frac{1}{n^z} = \exp(-\ln n \cdot z)}$$



$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

Szeregi Laurenta

$$w \longmapsto \frac{1}{w}$$



$$w \cdot \frac{1}{w} = 1$$

Def. szereg postaci

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-p)^n := \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-p)^n}_{\parallel} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n}_{\text{szereg potęgowy}}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n \left(\frac{1}{z-p}\right)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \left(\frac{1}{z-p}\right)^n$$

nazywamy szeregiem Laurenta.

Jeśli $R = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$, $r = \underbrace{\left(\limsup_{n\to -\infty} \sqrt[|n|]{|a_n|}\right)^{\cancel{-1}}}$, to

szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n$ jest zbieżny na $D(p,R)$
(i rozbieżny na $\mathbb{C} \setminus \overline{D(p,R)}$)

a szereg $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n w^{-n}$ jest zbieżny dla $w \in D\left(0, \frac{1}{r}\right)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$$

podstawiając w miejsce $w = \frac{1}{z-p}$ otrzymujemy, że

$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-p)^n$ jest zbieżny, gdy $\frac{1}{|z-p|} < \frac{1}{r}$, czyli gdy $|z-p| > r$.

(i rozbieżny, gdy $|z-p| < r$)

Jeśli $r < R$, to szereg $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-p)^n$ jest zbieżny

na pierścieniu $A(p,r,R) = D(p,R) \setminus \overline{D(p,r)}$

(i rozbieżny na $\mathbb{C} \setminus \overline{A(p,r,R)}$).

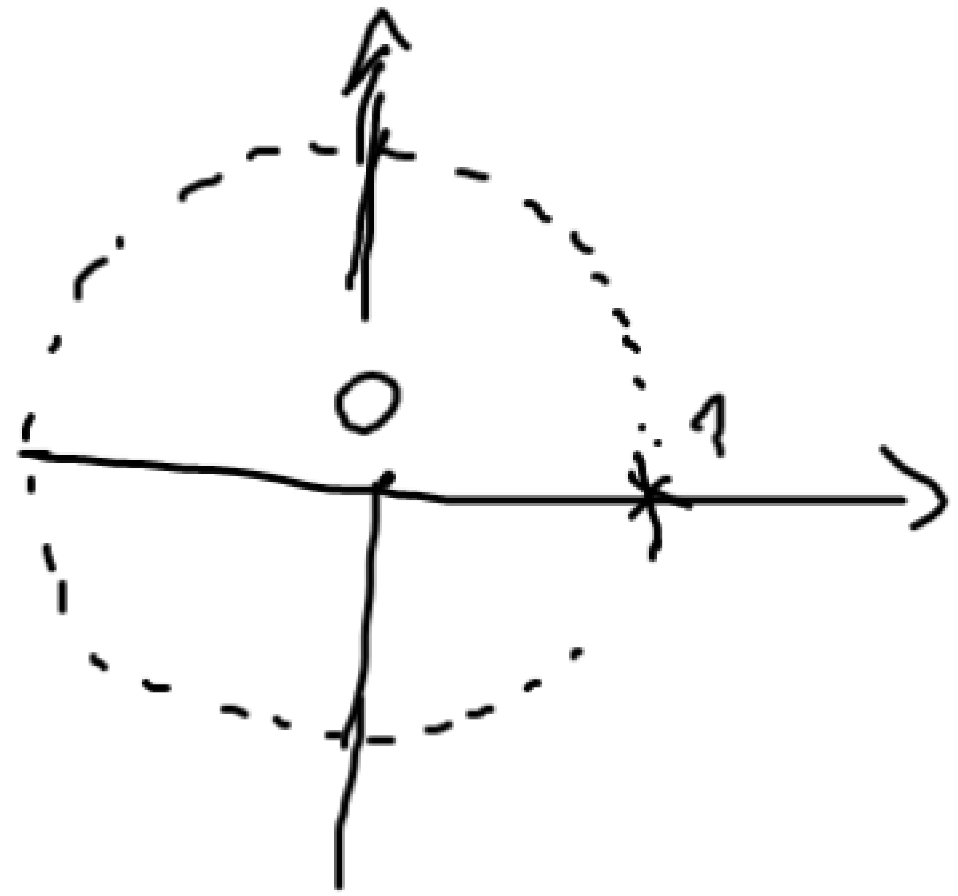
Jeśli $r = R$, to szereg $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-p)^n$ może być zbieżny jedynie

na $\partial D(p,r)$.

Jeśli $r > R$, to szereg —||——— jest wszędzie rozbieżny.

Przykład

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad , \quad \underline{|z|<1}$$



$$= \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n}_{} \quad , \quad a_n = \begin{cases} 1 , & n \geq 0 \\ 0 , & n < 0 \end{cases}$$

zbieżny na $A(0,0,1) = D'(0,1)$

$$R = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{1} \right)^{-1} = (1)^{-1} = \underline{1}$$

$$r = \lim_{n\to-\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} = 0$$

c.d. Dla $|z|>1$

$$f(z)=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}\,\frac{1}{\frac{1}{z}-1}=\frac{-1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n}=\cancel{1}$$

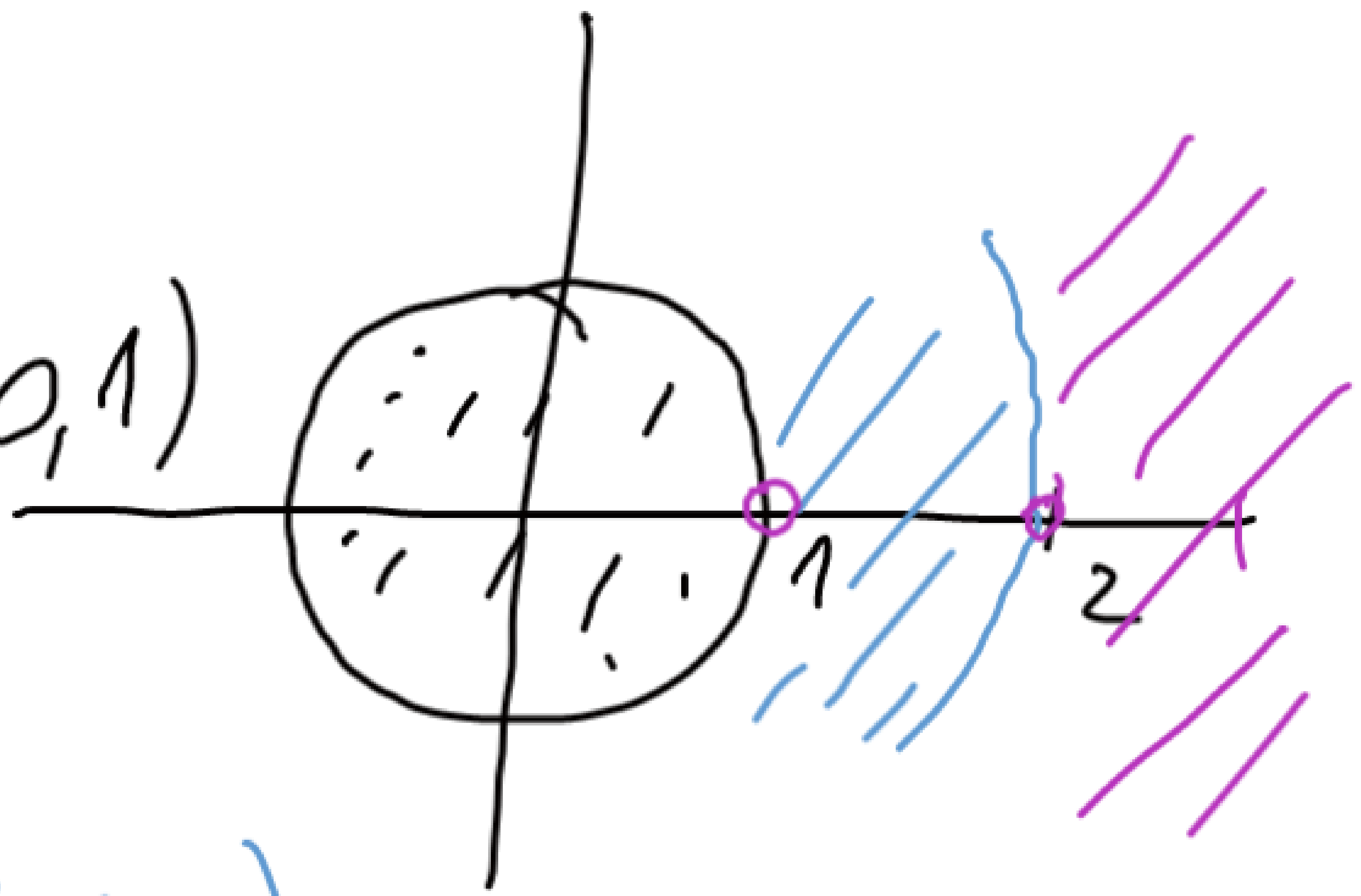
$$=\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{1}{z^{n+1}}=\sum_{k=-\infty}^{-1}-z^{k}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k z^k,\quad b_k=\begin{cases}0, & k\geq 0\\ -1, & k<0\end{cases}$$

$$\mathbb{C}\setminus\overline{D(0,1)}=A(0,1,\infty).$$

Np.

$$g(z) := f(z) + f\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-\frac{z}{2}} =$$

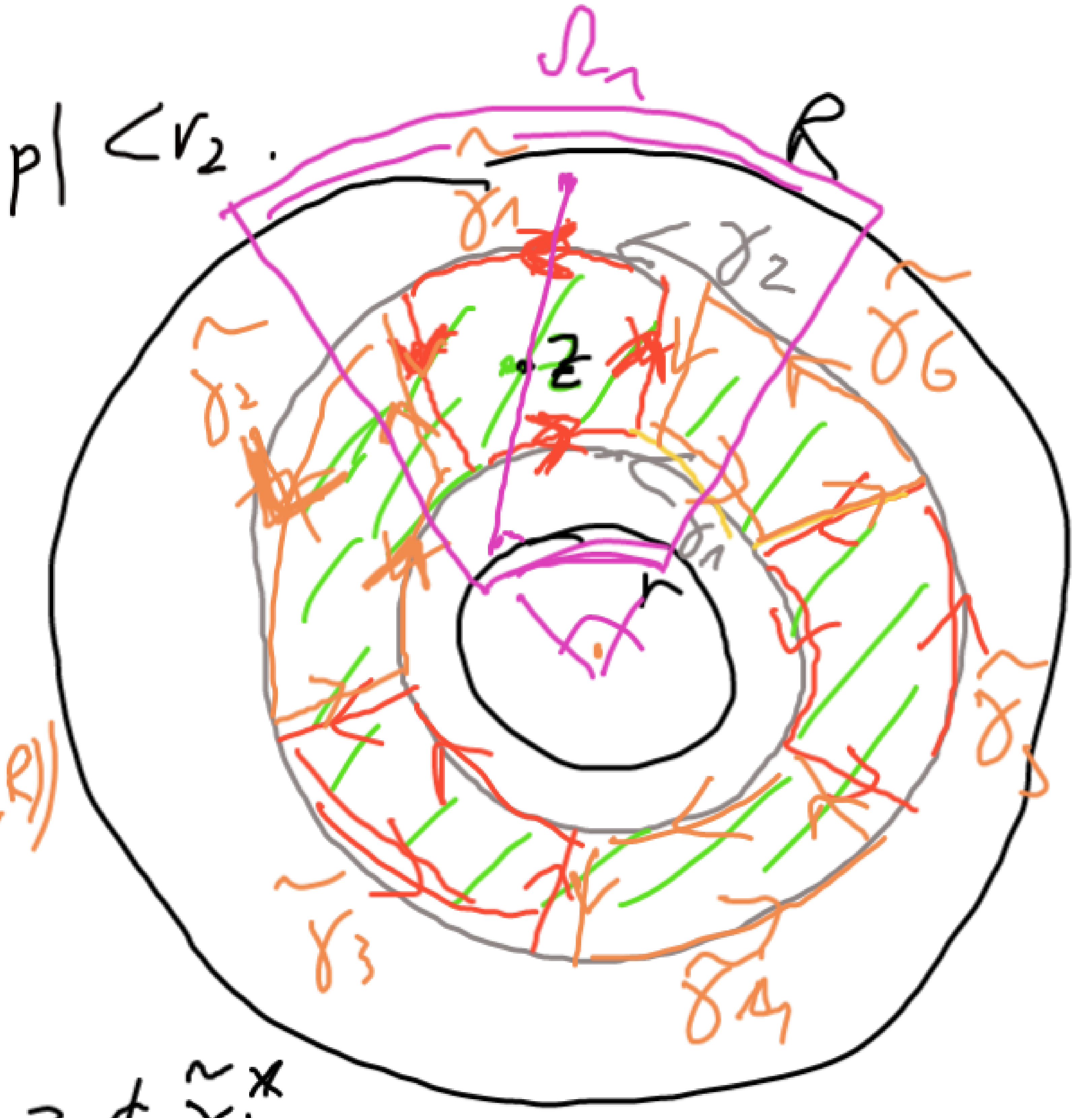
$g \in H(\mathbb{C} \setminus \{1,2\})$



$$= \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \left(z^n + \left(\frac{z}{2}\right)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right), & z \in D(0,1) \\ \sum_{n=-\infty}^{-1} -z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n, & z \in A(0,1,2) \\ \sum_{n=-\infty}^{-1} -z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} -\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} -\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) z^n, & z \in A(0,2,\infty) \end{cases}$$

Tw. (wzór Cauchy'ego) Załóżmy, że $f \in H(A(p,r,R))$, gdzie $r<R$, oraz niech $\gamma_j(t) = p + r_j e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, gdzie $r < r_1 < r_2 < R$, $j = 1, 2$. Wówczas

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma_2} - \int_{\gamma_1}\right)\frac{f(w)\,dw}{w-z}, \qquad r_1 < |z-p| < r_2.$$



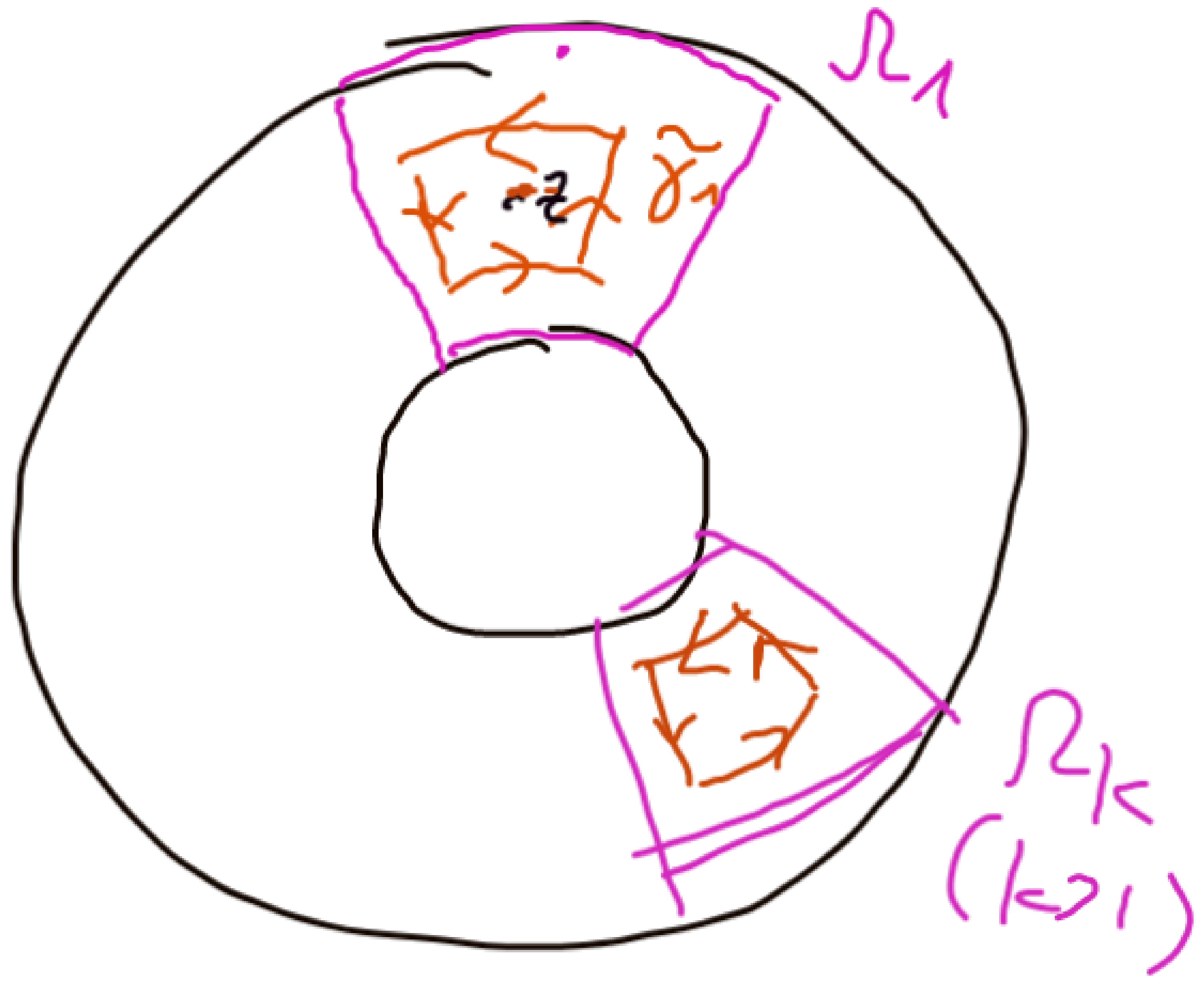
D-d. Ustalmy r_1, r_2 i z jw. Piszemy

$$\left(\int_{\gamma_2} - \int_{\gamma_1}\right) h = \sum_{k=1}^{n} \int_{\tilde\gamma_k} h, \qquad h \in C(A(p,r,R))$$

gdzie $\mathrm{Ind}_{\tilde\gamma_k}(z) = 1$ dla $k=1$, $=0$ dla $k>1$, $z \notin \tilde\gamma_k^*$.

Korzystając ze wzoru Cauchy'ego (lub tw. Cauchy'ego) dla obszarów gwiaździstych $\Omega_k \subset \Omega$ t. że $\Omega_k \supset \tilde{\gamma}_k^*$ obciętemu

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}_1} \frac{f(w)\,dw}{w-z}$$

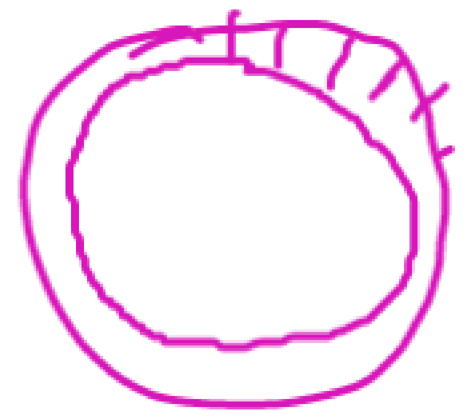


oraz

$$\int_{\tilde{\gamma}_k} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = 0 \quad \text{dla } k = 2, 3, \ldots, n$$

dla ust. z

$\in H(\Omega_k)$ jako funkcja w

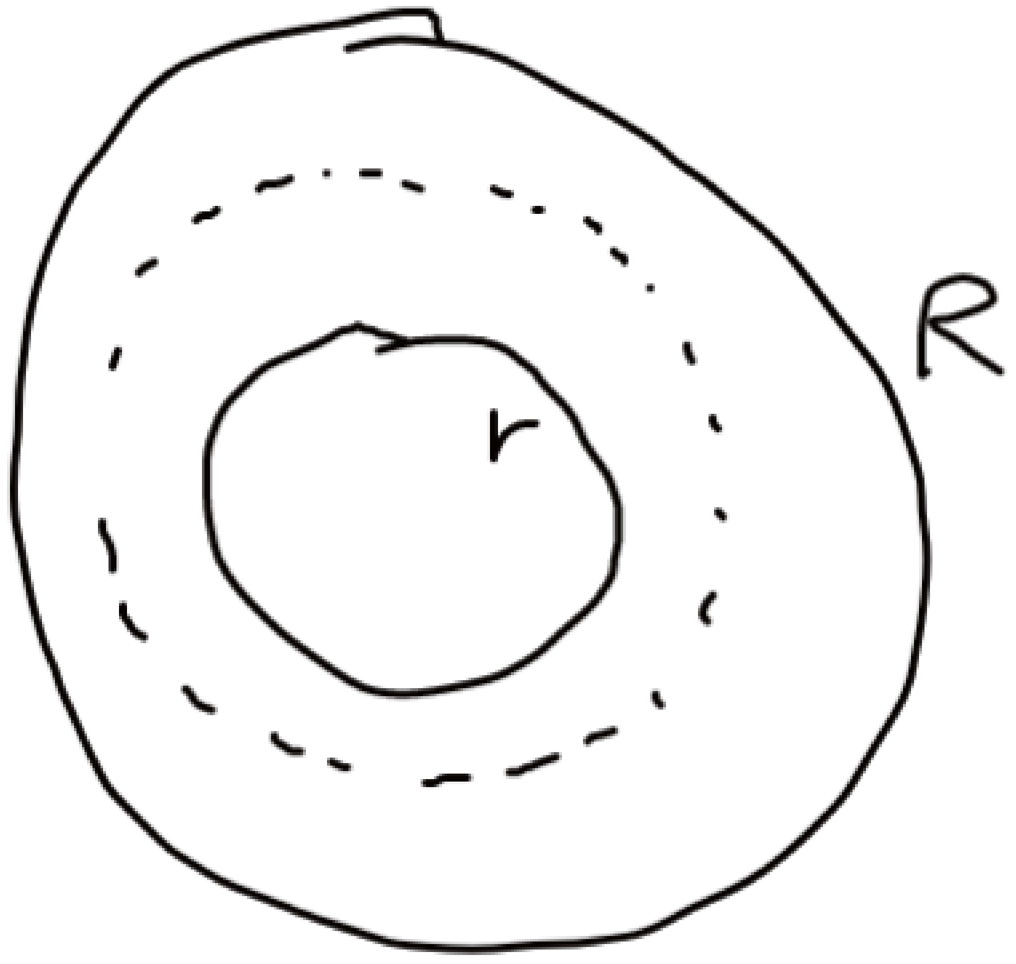


Tw. Załóżmy, że $f \in H(A(p,r,R))$, gdzie $r < R$. Niech $\gamma = p + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Wówczas

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-p)^n, \quad z \in A(p,r,R),$$

gdzie

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}}\, dw.$$



Uwaga. Jeśli $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-p)^n$ dla $z\in A(p,r,R)$, $r<R$,

to biorąc $\gamma(t)=p+\rho e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$, $r<\rho<R$

oraz $k\in\mathbb{Z}$ otrzymujemy

$$\int_\gamma f(z)(z-p)^k\,dz = \int_\gamma \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-p)^{n+k}}\,dz$$

szereg Laurenta jest zbieżny wj. na $A(p,r,R)$, bo
można go zapisać jako sumę dwóch szeregów potęgowych, jednego z nich
dla zmiennej $\frac{1}{z-p}$.

$\gamma^* \subset\subset A(p,r,R)$, więc na γ^* szereg $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-p)^{n+k}$ jest zb. jedn.

Możemy więc zamienić kolejność $\int$ i $\sum$:

$$\int_\gamma f(z)(z-p)^k \, dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_\gamma a_n (z-p)^{n+k} \, dz = \int_\gamma a_{-k-1} (z-p)^{-1} \, dz =$$

$$(z-p)^{n+k} = \left(\frac{(z-p)^{n+k+1}}{n+k+1}\right)'_z$$

$n+k \neq -1$

$$= a_{-k-1} \, 2\pi i \, \mathrm{Ind}_\gamma(p) = 2\pi i \cdot a_{-k-1}.$$

Stąd wynika, że rozw. w szereg Laurenta na $A(p,r,R)$ jest jednoznaczne.

$n+k=-1$

$n=-k-1$