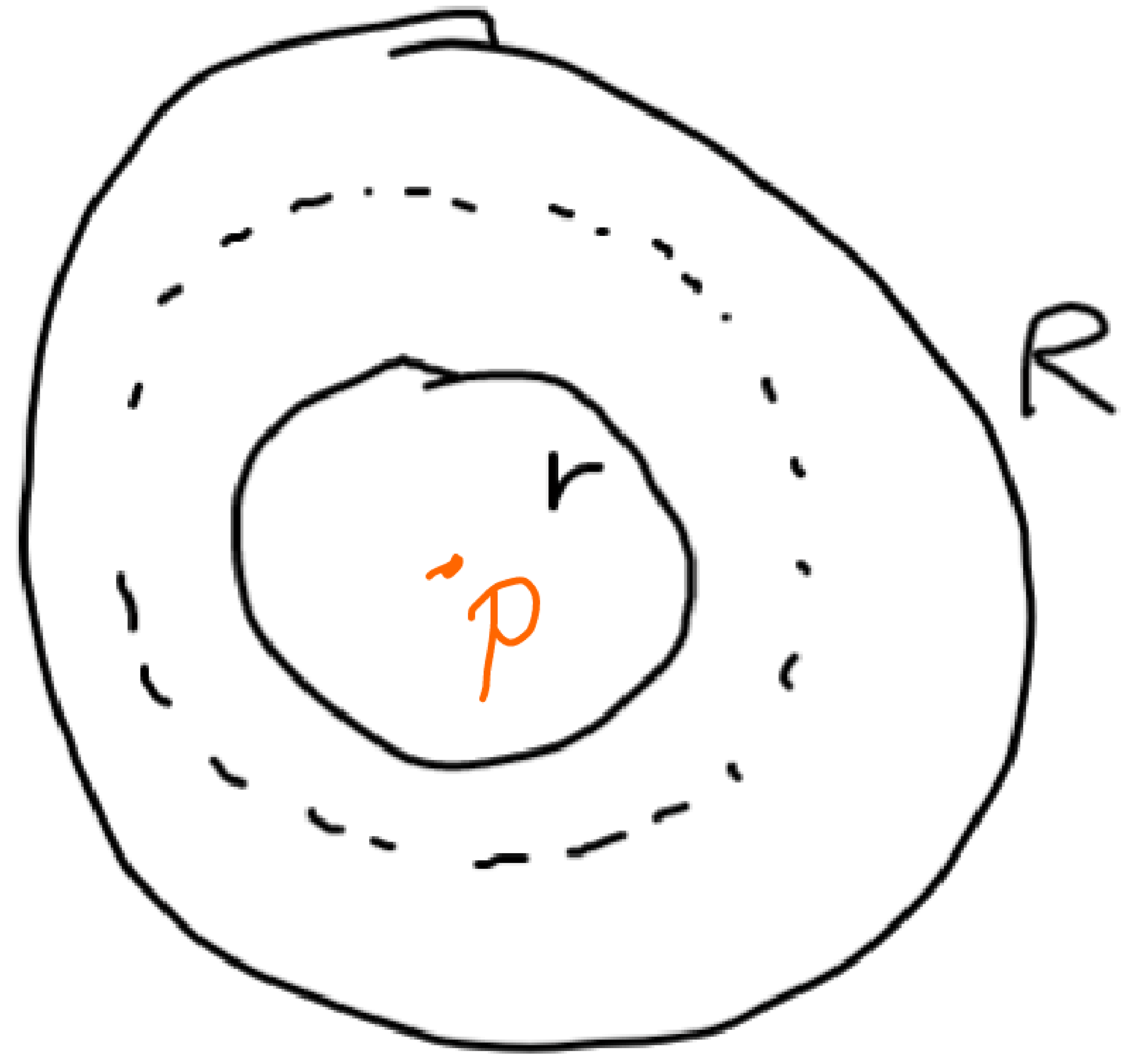
PRZYPOMNIENIE:

Tw. Załóżmy, że $f \in H(A(p,r,R))$, gdzie $r < R$. Niech $\gamma = p + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Wówczas

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-p)^n, \quad z \in A(p,r,R),$$



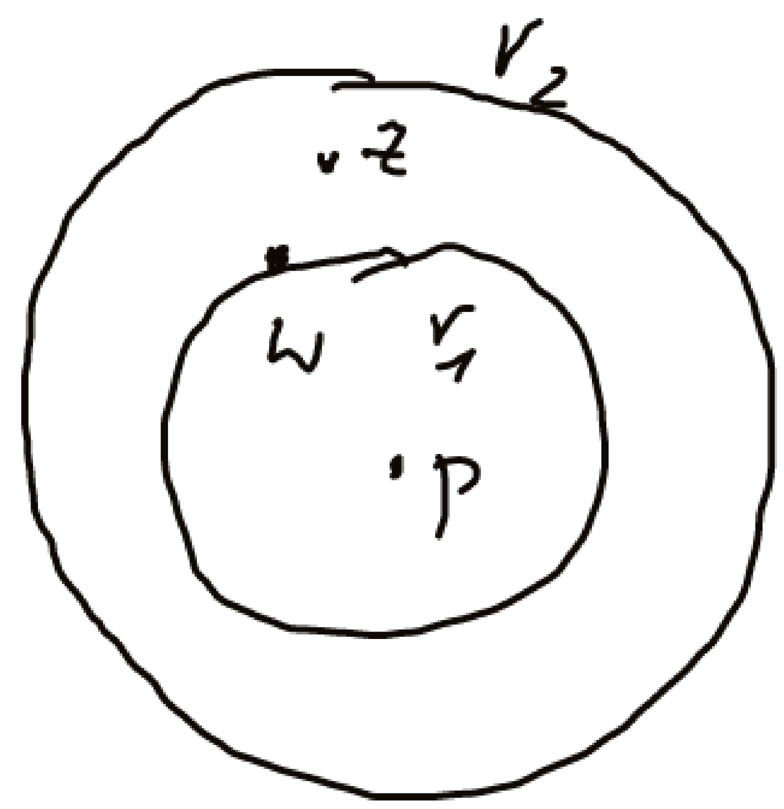
gdzie

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}}\, dw.$$

(było bez dowodu...)

Dd

Ustalmy $r < r_1 < r_2 < R$ i okręgi γ_1, γ_2 jak we wzorze C.



Dla $z \in A(p, r_1, r_2)$ zachodzi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma_2} - \int_{\gamma_1}\right)\frac{f(w)\,dw}{w-z} =: I_2 - I_1 .$$

Mamy

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)\,dw}{(w-p)-(z-p)} = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{1}{z-p}\cdot\frac{f(w)\,dw}{1-\frac{w-p}{z-p}} =$$

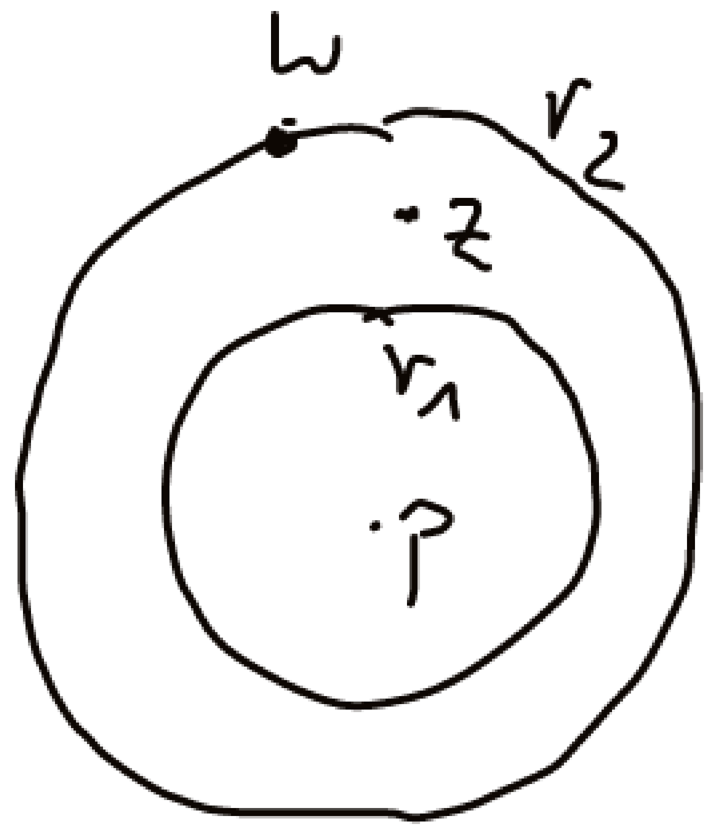
$$= \frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{z-p}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w-p}{z-p}\right)^n dw \overset{\text{tw.F}}{=} \frac{-1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-p)^{-n-1}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{(w-p)^{-n}}\,dw =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}(z-p)^{-n-1}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{(w-p)^{-n}}\,dw}}_{=:\, b_{-n-1}} = -\sum_{n=0}^{\infty} b_{-n-1}(z-p)^{-n-1} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} b_n (z-p)^n$$

Uzasadnienie użycia tw. F:

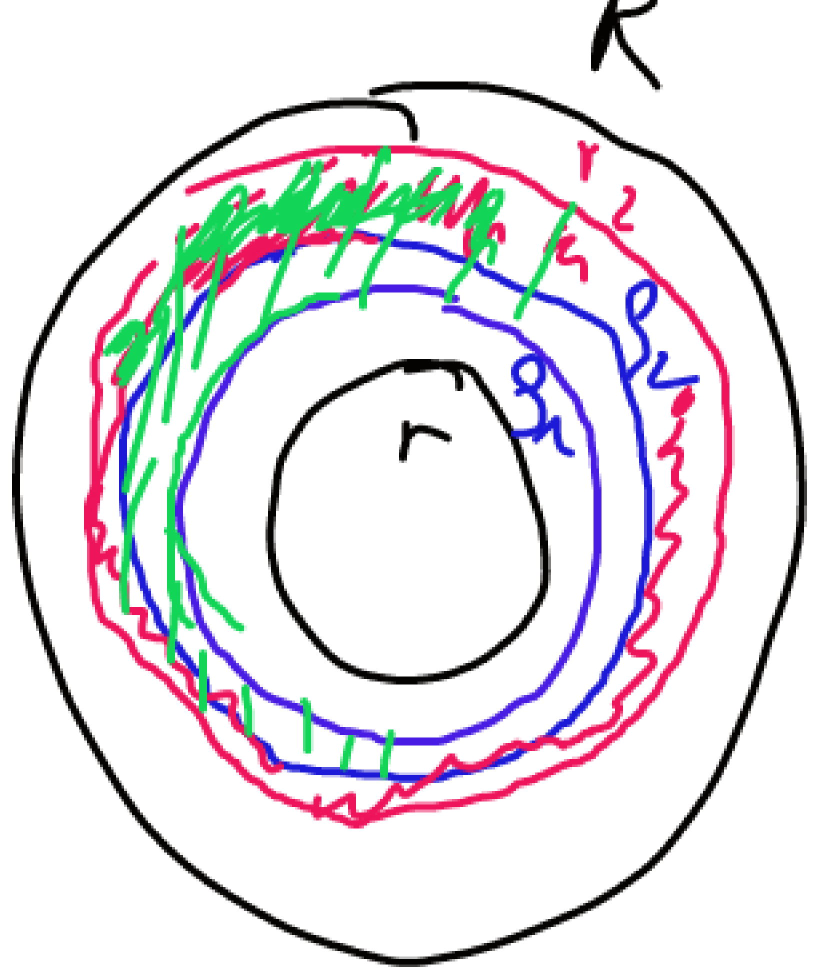
$$\int_{\gamma_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{f(w)}{z-p}\left(\frac{w-p}{z-p}\right)^n\right| |dw| = \int_{\gamma_1}\frac{|f(w)|}{\overbrace{|z-p|\cdot\frac{1}{1-\frac{r_1}{|z-p|}}}^{\text{nie zależy od } w}}\,|dw| < \infty$$

$$J_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)\,dw}{(w-p)-(z-p)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-p} \frac{dw}{1-\frac{z-p}{w-p}} =$$



$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-p} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-p}{w-p}\right)^n dw \overset{\text{tw. F}}{=\!=}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (z-p)^n \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}} dw}_{=:\, b_n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z-p)^n \cdot b_n$$



Ostatecznie

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-p)^n \qquad , z \in A(p, r_1, r_2).$$

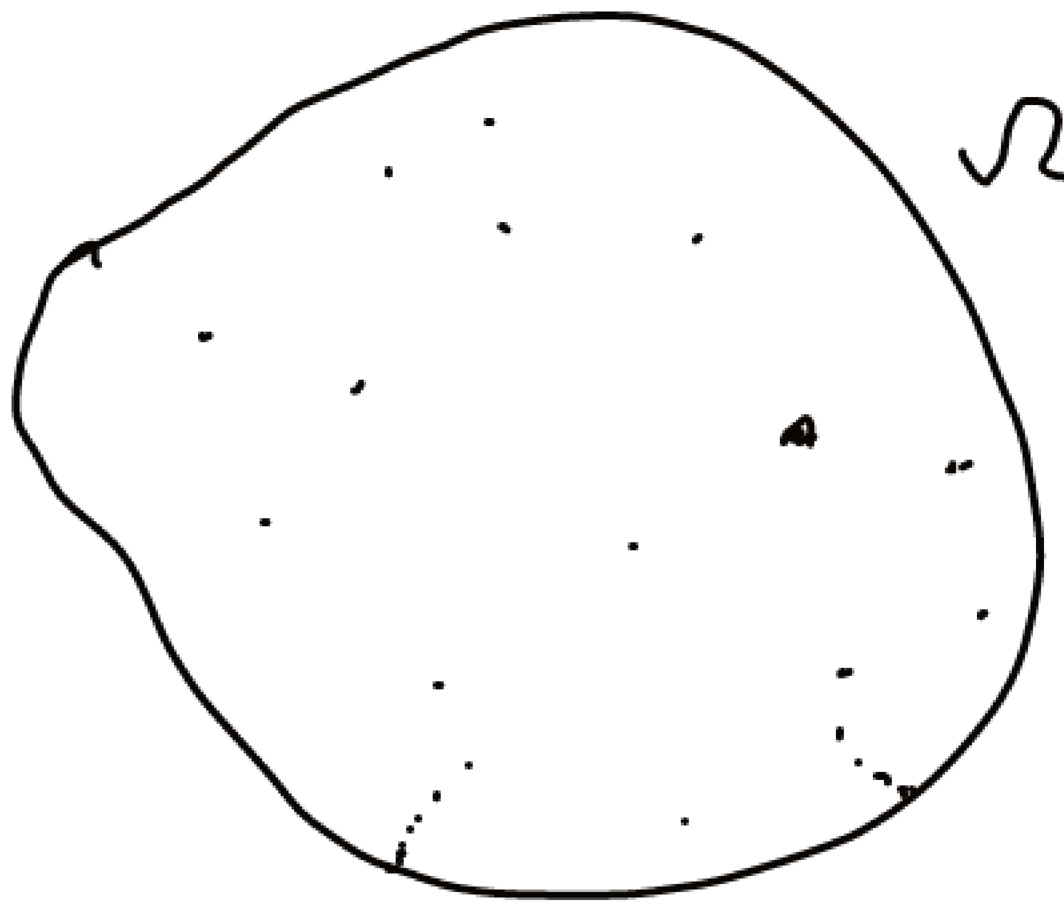
Korzystając z pow. dla r_1, r_2 równego ρ_2, r_2 oraz ρ_1, r_2 $\Rightarrow$ wsp. z indeksami ujemnymi są takie same (z jednoznaczności rozwinięcia)

$\boxtimes$

Iloczyny nieskończone

$f \in H(\Omega)$, $f \not\equiv 0$ na żadnej składowej spójności Ω

$Z(f) = f^{-1}(\{0\})$ – nie ma punktów skupienia w Ω



$\Omega \subset \mathbb{C}$

$p_n = f_1 f_2 f_3 \ldots$

Def. Załóżmy, że $u_n \in \mathbb{C}$ takimi, że istnieje granica ciągu

$$p_n = (1+u_1)(1+u_2)\dots(1+u_n).$$

Piszemy wtedy $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n) = \lim_{n\to\infty} p_n$ i mówimy, że iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ ma granicę. Gdy ta granica jest skończona, to mówimy, że — " — jest zbieżny.

Uwaga.

Często przyjmuje się, że w przypadku $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n) = 0$ iloczyn jest rozbieżny. (Ale my tak nie robimy!)

Lemat Jeśli $u_1, \dots, u_N, \dots \in \mathbb{C}$ oraz

$$p_N = \prod_{n=1}^{N} (1+u_n) \qquad p_N^* = \prod_{n=1}^{N} (1+|u_n|),$$

to

$$p_N^* \leq \exp(|u_1| + \dots + |u_N|)$$

oraz

$$(*) \quad |p_N - 1| \leq p_N^* - 1$$

Dd. Dla $x \geq 0$: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \geq 1 + x$. Korzystając z tej nierówności dla $x = |u_k|$, $k = 1, \dots, N$ i wymnażając stronami dostajemy:

$$(1+|u_1|)(1+|u_2|)\dots(1+|u_N|) \leq e^{|u_1|} e^{|u_2|} \dots e^{|u_N|} = \exp(|u_1| + \dots + |u_N|).$$

Zauważmy, że $(*)$ zachodzi dla $N=1$: $p_1 = 1 + u_1$, $p_1^* = 1 + |u_1|$.

Zał. że $(*)$ zachodzi dla pewnego $N \geq 1$. Wtedy

$$|p_{N+1} - 1| = |(p_N - 1 + 1)(1 + u_{N+1}) - 1| = |(p_N - 1)(1 + u_{N+1}) + u_{N+1}| \leq$$

$$\leq |p_N - 1| \cdot (1 + |u_{N+1}|) + |u_{N+1}| \underset{z\,(*)}{\leq} (p_N^* - 1)(1 + |u_{N+1}|) + |u_{N+1}| =$$

$$= \underbrace{p_N^*(1 + |u_{N+1}|)}_{p_{N+1}^*} - 1 - |u_{N+1}| + |u_{N+1}| = p_{N+1}^* - 1.$$

Z zasady indukcji m. wynika $(*)$. $\boxtimes$

Tw. Niech $\{u_n\}$ będzie ciągiem ograniczonych funkcji zespolonych na zbiorze S, takim, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(s)|$ jest zbieżny jednostajnie na S. Wówczas iloczyn

$$f(s) := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + u_n(s)\right)$$

jest zbieżny jednostajnie na S i $f(s_0) = 0$ dla pewnego $s_0 \in S$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u_n(s_0) = -1$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$.

Np. dla $S = \{s_0\}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| < \infty \implies \prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n) \text{ - zbieżny}$$

i $= 0 \iff u_n = 0$ dla pewnego n.

Dd. Widzimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(s)|$ jest funkcją ograniczoną na S.

Niech $p_N^{(s)} = \prod_{n=1}^{N} (1+u_n(s))$. Z poprzedniego lematu

$$|p_N(s)| \le |p_N^*(s)| \le \exp\big((|u_1|+\dots+|u_N|)(s)\big) \le \exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(s)|\Big) \le C$$

dla dow. N i $s \in S$.

Mamy dla dowolnych $s \in S$ i $N > M$

$$|p_N(s) - p_M(s)| = |p_M(s)| \cdot \Big|\prod_{n=M+1}^{N} (1+u_n(s)) - 1\Big| \overset{\text{lemat, } (*)}{\le}$$

$$\le |p_M(s)| \cdot \Big(\prod_{n=M+1}^{N} (1+|u_n(s)|) - 1\Big) \le C\Big(\exp\Big(\sum_{n=M+1}^{N} |u_n(s)|\Big) - 1\Big)$$

Stąd i ze zbieżności jednostajnej $\sum |u_n(s)|$ wynika, że ciąg (p_n) jest ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni funkcji ogr. na S z normą supremum.

Z zupełności tej przestrzeni otrzymujemy, że istnieje funkcja ogr. f t. że $p_n \rightrightarrows f$ na S.

Załóżmy, że $f(s_0) = 0$. Niech M będzie na tyle duże, by

$$\exp\Big(\sum_{n=M+1}^{\infty} |u_n(s_0)|\Big) - 1 < \frac{1}{2}.$$

Z nierówności powyżej $(N > M)$

$$|p_N(s_0) - p_M(s_0)| \le |p_M(s_0)| \cdot \underbrace{\Big(\exp\Big(\sum_{n=M+1}^{N} |u_n(s)|\Big) - 1\Big)}_{<1/2} < \frac{1}{2}|p_M(s_0)|$$

Z nier. trójkąta

$$|p_N(s_0)| \ge |p_M(s_0)| - |p_N(s_0) - p_M(s_0)| \ge \frac{1}{2}|p_M(s_0)| \Rightarrow p_M(s_0) = 0$$

$\downarrow_{N\to\infty}$ $f(s_0) = 0$

$\Rightarrow u_n(s_0) = -1$ dla p. $n \in \{1, \dots, M\}$ ⊠

Wniosek. Jeśli $u_n \in H(\Omega)$ i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ jest zbieżny nj. na Ω, to iloczyn

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(z)) \quad , z \in \Omega \qquad (*)$$

jest zbieżny nj. na Ω, $f \in H(\Omega)$ oraz $f(z_0) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u_n(z_0) = -1$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$.

Dowód. Niech $K \subset\subset \Omega$ – dowolny. Z poprz. tw. wynika zbieżność jednostajna iloczynu $(*)$ na zbiorze K. Tzn. że $(*)$ zbiega nj. na Ω. $f \in H(\Omega)$ wynika z tego, że granica nj. ciągu f. hol. jest f. hol.

Ostatnia część wynika z poprz. tw. $\boxtimes$

Tw. Niech $u_n \in H(\Omega)$ będą takie, że $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ jest zbieżny nj. na Ω, niech

$$(*) \quad f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + u_n(z)\right), \quad z \in \Omega.$$

Dla $z \in \Omega$ t.ż. $f(z) \neq 0$ zachodzi

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n'(z)}{1 + u_n(z)},$$

przy czym szereg po prawej jest zbieżny nj. na $\Omega \setminus f^{-1}(\{0\})$

Formalnie: nakładając Log na $(*)$:

$$\log f = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}(1 + u_n) \qquad /\,'$$

$$\frac{f'}{f} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n'}{1 + u_n}$$