Tw. $u_n \in H(\Omega)$, $\sum |u_n|$ - zbieżny nj. na Ω,

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n(z)), \quad z \in \Omega$$

Dla $z \in \Omega$ takich, że $f(z) \neq 0$ zachodzi wzór

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n'(z)}{1+u_n(z)},$$

przy czym szereg po prawej jest zbieżny nj. na $\Omega \setminus f^{-1}(\{0\})$.

D-d. $f_N(z) = \prod_{n=1}^{N} (1+u_n(z))$. Jeśli $f_N(z) \neq 0$, to

$(fgh)' = (fg)'h + fgh'$

(*) $$\frac{f_N'(z)}{f_N(z)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{u_n'(z)}{1+u_n(z)}.$$

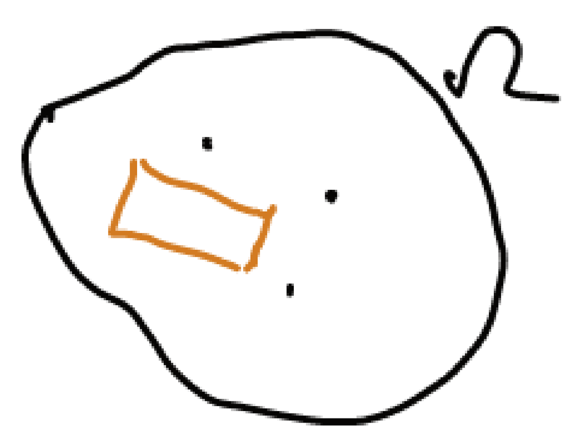
$$\| \quad \frac{1}{f_N(z)} \Big((1+u_1(z))'\cancel{(1+u_2(z))}\cdots\cancel{(1+u_N(z))} + (1+u_1(z))(1+u_2(z))'(1+u_3(z))\cdots(1+u_N(z)) + \dots + (1+u_1(z))\cdots(1+u_{N-1}(z))\cdot(1+u_N(z))' \Big)$$

$$= \frac{1}{(1+u_1(z))\cdots(1+u_N(z))} \Big(\text{---} \; \| \; \text{---} \Big)$$

$$= \frac{u_1'(z)}{1+u_1(z)} + \dots + \frac{u_N'(z)}{1+u_N(z)}$$

Z pop. tw. $f_N \to f$ nj. w Ω. Z ogólnych własności też $f_N' \to f'$ nj. w Ω.

Jeśli $K \subset\subset \Omega \setminus f^{-1}(\{0\})$, to $|f| \geq \varepsilon > 0$ na K.



Ze zbieżności $f_N \rightrightarrows f$ na K wynika, że $|f_N| \geq \varepsilon/2$ na K, dla dużych N. Ponadto $|f_N'| \leq M$ na K dla dużych N.

Stąd $\frac{f_N'}{f_N} \rightrightarrows \frac{f'}{f}$ na K.

$$\left|\frac{f_N'}{f_N}(z) - \frac{f'}{f}(z)\right| = \frac{|f_N'(z)f(z) - f'(z)f_N(z)|}{|f_N(z)f(z)|} = \frac{|f_N'(z)f(z) - f'(z)f(z) + f'(z)f(z) - f'(z)f_N(z)|}{|f_N(z)f(z)|} \le$$

$$\le \frac{\overbrace{|f(z)|}^{\le C \text{ na } K}\,|f_N'(z) - f'(z)| + \overbrace{|f'(z)|}^{\le M}\,|f(z) - f_N(z)|}{|f_N(z)f(z)|} \overset{\text{dla dużych } N}{\le} \frac{C|f_N'(z) - f(z)| + M|f(z) - f_N(z)|}{\frac{\varepsilon}{2}\cdot\varepsilon} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

jednostajnie ze względu na $z \in K$.

Zatem z równości (*) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n'(z)}{1+u_n(z)}$ zb. niem. jedn. na Ω do $\frac{f'}{f}$.

$\boxtimes$

Lemat Jeśli $f \in H(\mathbb{C})$ nie ma zer, to istnieje $h \in H(\mathbb{C})$ taka, że $f = \exp h$.

D-d.
Funkcja $\frac{f'}{f} \in H(\mathbb{C})$, więc z tw. o funkcji pierwotnej ($\mathbb{C}$ jest gwiaździsty) wynika, że istnieje $g \in H(\mathbb{C})$ taka, że $g' = \frac{f'}{f}$. Wówczas

$$(fe^{-g})' = f'e^{-g} + fe^{-g} \cdot (-g') = f'e^{-g} + fe^{-g} \cdot \left(-\frac{f'}{f}\right) = 0,$$

zatem $fe^{-g} = \text{const.}$ na $\mathbb{C}$, $\underline{fe^{-g} = c \neq 0}$. Istnieje $C \in \mathbb{C}$ t. że $\overline{c = \exp(C)}$.

Bierzemy $h = C + g$, wtedy $fe^{-h} = fe^{-C-g} = e^{-C} fe^{-g} = e^{-C} \cdot c = 1$,

czyli $f = e^h$.

$\boxtimes$

Przykład (rozkład funkcji $\sin \pi z$).

Niech
$$g(z) = z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Z kryterium Weierstrassa szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^2}{n^2}$ jest nj. zbieżny na $\mathbb{C}$.

Z poprzedniego twierdzenia (wniosku) iloczyn definiujący g jest zbieżny nj. na $\mathbb{C}$, a więc, g ma zera tylko w punktach całkowitych i są to zera jednokrotne (co można zobaczyć wyłączając odpowiedni czynnik przed iloczyn). Zatem funkcja $\frac{\sin \pi z}{g(z)}$ ma tylko osobliwości pozorne, więc rozszerza się do funkcji całkowitej, która nie ma zer. Zatem z lematu wynika, że
$$\frac{\sin \pi z}{g(z)} = e^{h(z)} \quad \text{dla pewnej } h \in H(\mathbb{C}),$$

czyli
$$\sin \pi z = e^{h(z)} g(z) = \underbrace{e^{h(z)} \cdot z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)}_{=\prod_{n=1}^{\infty}(\dots)}, \qquad (0)$$

iloczyn po prawej jest zbieżny nj. na $\mathbb{C}$.

Z twierdzenia o pochodnej log. iloczynu:
$$\frac{(\sin \pi z)'}{\sin \pi z} = \frac{(e^h)'}{e^h} + \frac{z'}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)'}{1 - \frac{z^2}{n^2}}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z},$$
i szereg po prawej jest zbieżny nj. na $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Czyli

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{\pi\cos\pi z}{\sin\pi z} = \frac{(\sin\pi z)'}{\sin\pi z} = \frac{(e^h)'}{e^h} + \frac{z'}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)'}{1-\frac{z^2}{n^2}} = \frac{\cancel{e^h}\cdot h'}{\cancel{e^h}} + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{2z}{n^2}}{\left(1-\frac{z}{n}\right)\left(1+\frac{z}{n}\right)} =$$

f. nieparzysta

$$= h' + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2z}{(n-z)(n+z)} = h' + \underbrace{\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right)}, \qquad (*)$$

przy czym pow. szereg zbiega n.j. na $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$. $\qquad \frac{2z}{(z-n)(z+n)}$

Z twierdzenia o zb. n.j. funkcji holomorficznych możemy różniczkować pow. szereg wyraz po wyrazie, więc z $(*)$:

$$\pi\frac{-1}{\sin^2\pi z}\cdot\pi = h''(z) - \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{(z-n)^2} - \frac{1}{(z+n)^2}\right) =$$

$$= h''(z) - \underbrace{\frac{1}{z^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}} = h''(z) - \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z-n)^2}$$

stąd

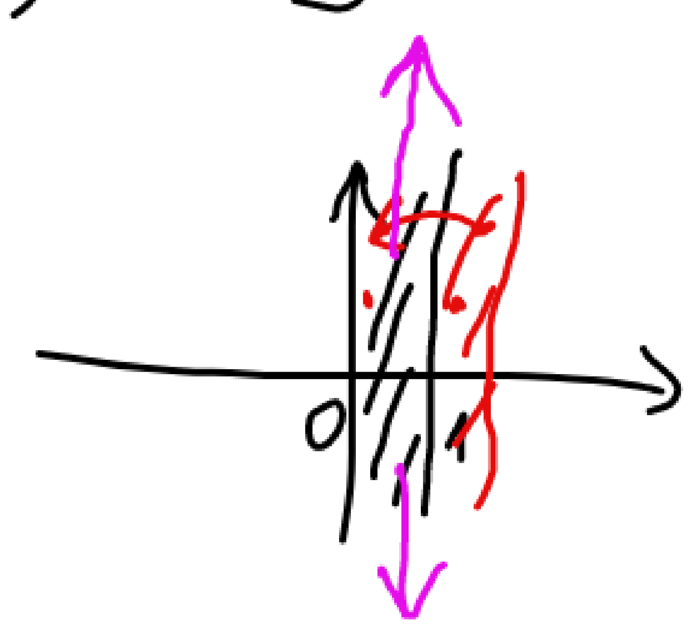
$$c = h''(z) = \underbrace{\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z-n)^2}\right) - \frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}}_{\to 0 \text{ przy } y\to\infty,\ z=x+yi}, \qquad z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z} \qquad (\longleftarrow)$$

$$h''(z+1) = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\underset{z\neq(n-1)}{(z+1-n)^2}}\right) - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z+\pi)} = h''(z), \qquad z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}.$$

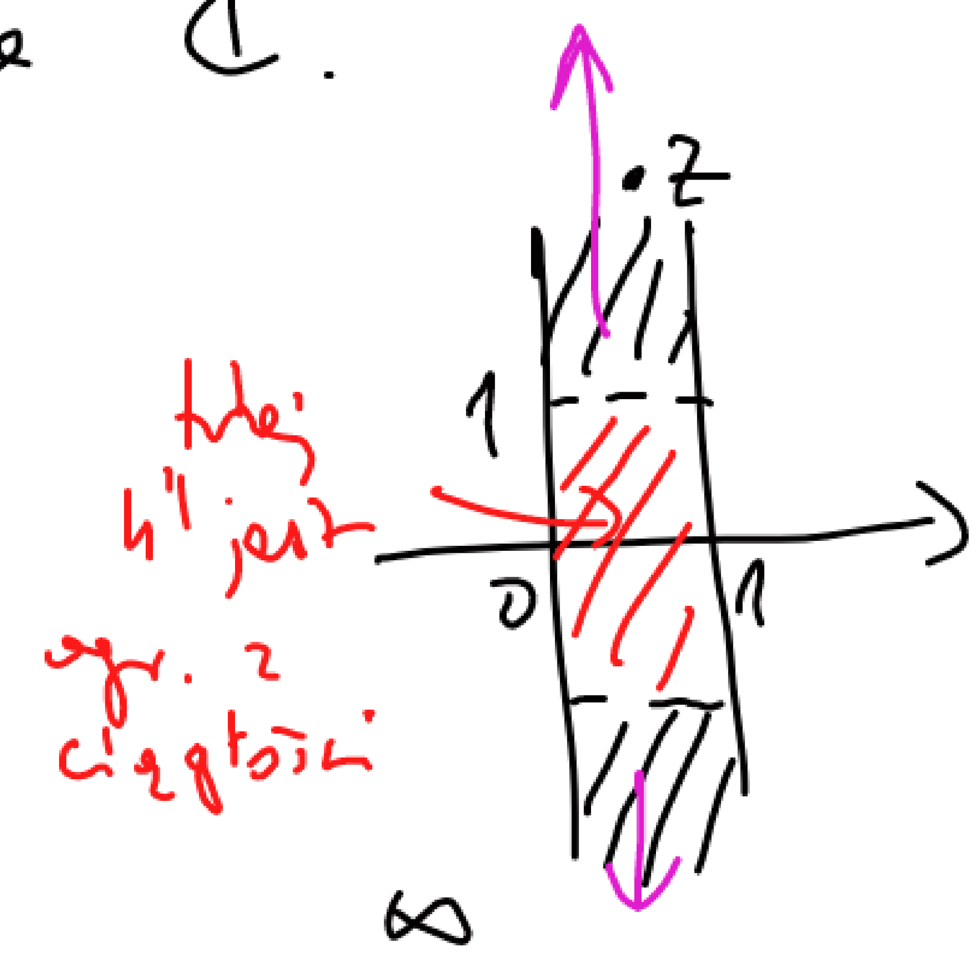
Zatem $\underbrace{h''(z+1) - h''(z)} = 0$ na $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, więc z ciągłości lewej strony

$h''(z+1) - h''(z) = 0$ na $\mathbb{C}$, czyli h'' jest 1-okresowa.

Wobec tego $h''(\mathbb{C}) = h''(\{z : 0 \le \operatorname{Re} z \le 1\})$.



Pokażemy, że h'' jest ogr. na $D=\{z : 0 \le \operatorname{Re} z \le 1\}$, czyli na $\mathbb{C}$.



Jeśli $z = x+iy$, gdzie $x\in[0,1]$, $|y|\ge 1$, to

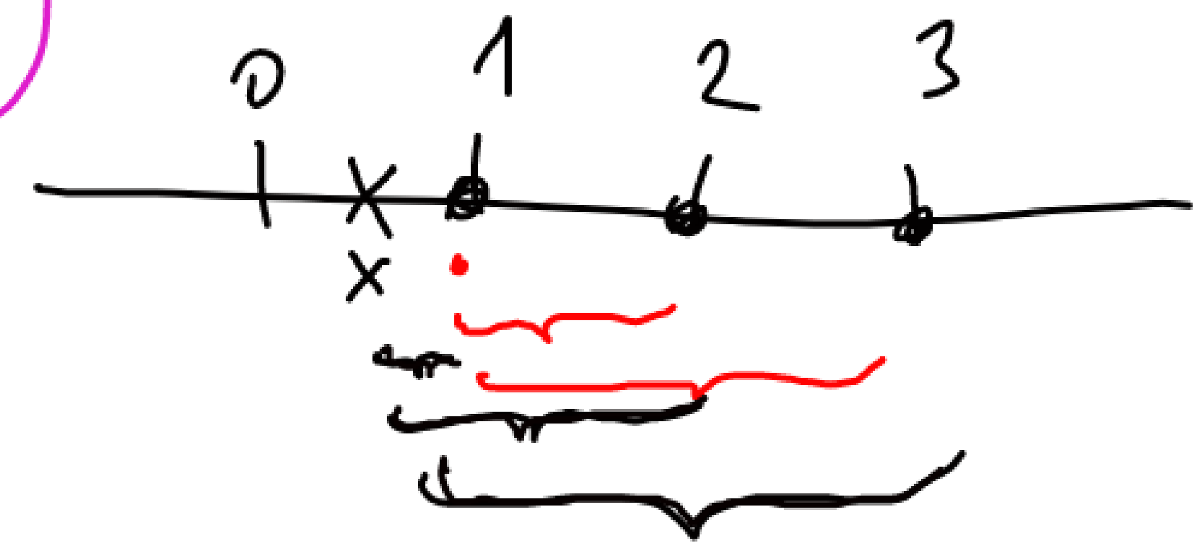
$$\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2}\right| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{|z-n|^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x-n)^2+y^2} \le$$

$$\overset{\bullet+\bullet\bullet}{\le} \underbrace{2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+y^2}}_{\to 0 \text{ przy } y\to\infty} \le$$

(tw. Leb. o zb. ogr., majoranta jest $\frac{1}{n^2+1}$)

$$\le \underbrace{2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}}_{\text{nie zależy od } z} < \infty$$

$\bullet$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x-n)^2+y^2} \le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+y^2}$



$\bullet\bullet$ $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{0}\frac{1}{(x-n)^2+y^2} \le \sum_{n=-\infty}^{0}\frac{1}{(-n)^2+y^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+y^2}$

Dalej

$$|\sin \pi z|^2 = \left|\frac{e^{\pi z i}-e^{-\pi z i}}{2i}\right|^2 = \frac{1}{4}\left|e^{\pi x i-\pi y} - e^{-\pi x i+\pi y}\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left|\left(e^{-\pi y}-e^{\pi y}\right)\cos\pi x + i\sin\pi x\left(e^{-\pi y}+e^{\pi y}\right)\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(e^{-\pi y}-e^{\pi y}\right)^2\cos^2\pi x + \sin^2\pi x\left(e^{-\pi y}+e^{\pi y}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{2\pi y}+e^{-2\pi y} - 2\cos^2\pi x + 2\sin^2\pi x\right) = \frac{1}{4}\left(e^{2\pi y}+e^{-2\pi y}\underbrace{-2\cos 2\pi x}_{\in[-2,2]}\right) \ge$$

$$\ge \frac{1}{4}\left(\underbrace{e^{2\pi|y|}}_{\ge e^{2\pi} > 4} - 2\right) \ge \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{2\pi|y|} + 2 - 2\right) = \underbrace{\frac{1}{8}e^{2\pi|y|}}_{\to\infty \text{ } y\to\infty} \ge \frac{1}{8}e^{2\pi} > 0$$

Zatem h'' jest ogr. na $\{z : \operatorname{Re} z\in[0,1], |\operatorname{Im} z| \ge 1\}$, z ciąg. h'' jest też ogr. na $[0,1]\times[-1,1]\subset\mathbb{C}$

h'' jest więc ogr. na D, więc z 1-okresowości na $\mathbb{C}$, z tw. Liouville'a

$h'' = \text{const}$. Z poprzednich oszacowań wynika, że $\lim\limits_{y\to\infty} h''(x+yi) = 0$,

więc $h'' = 0$.

Stąd $h' = \text{const}$.

Ze wzoru (*): $$h'(z) = \underbrace{\pi \operatorname{ctg} \pi z}_{\text{nieparzysta}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right)}_{\text{nieparzysta}} - \underbrace{\frac{1}{z}}_{\text{nieparzysta}}, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{-z-n} + \frac{1}{-z+n}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+z} + \frac{1}{z-n}\right)$$

h' jest stała i nieparzysta, więc $h' = 0$.

Wobec tego $h = \text{const}$. Ze wzoru (o)

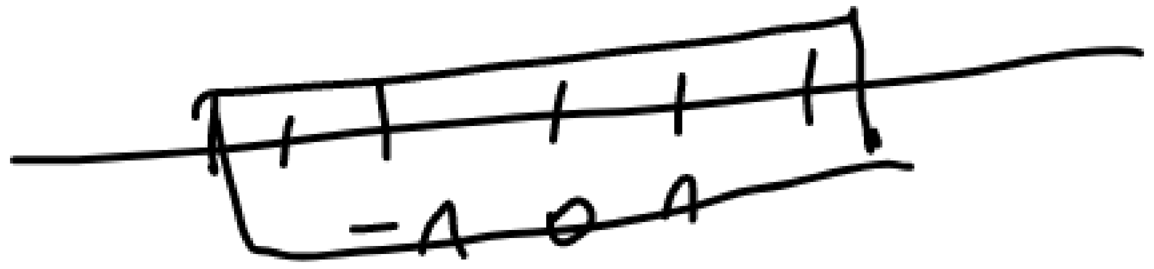
$$\underbrace{\frac{\sin \pi z}{z}}_{\downarrow z\to 0 \; \pi} = e^{h(z)} \underbrace{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)}_{\downarrow z \to 0 \; \prod_{n=1}^{\infty} 1 = 1} \Rightarrow e^{h} = \pi.$$

Podsumowując,

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) \qquad z \in \mathbb{C}$$

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right) \text{ ,,}=\text{''} \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{z-n}}_{\text{rozbieżny}} \quad , z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} \quad , z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$$



W szczególności z 1:

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) \quad , z \in \mathbb{C}$$ (dla $z=0$ rozumiane jako granica)