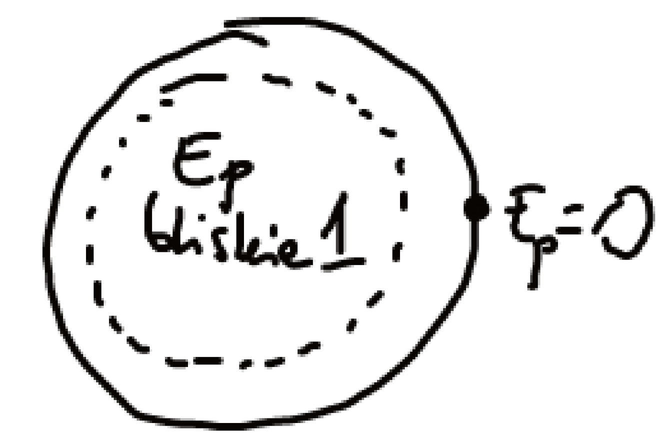
Niech $E_0(z)=1-z$,

$$E_p(z)=(1-z)\exp\left(z+\frac{z^2}{2}+\dots+\frac{z^p}{p}\right), \quad p=1,2,\dots \qquad E_p(0)=1$$

Te funkcje nazywają się czynnikami pierwszymi Weierstrassa.

Lemat Dla $|z|\leq 1$ i $p=0,1,\dots$

$$|1-E_p(z)|\leq |z|^{p+1}.$$



D-d. Dla $p=0$ $|1-E_0(z)|=|z|\leq|z|$. Dla $p\geq 1$ piszemy

$$E_p'(z)=-1\cdot\exp(\dots)+\exp(\dots)\cdot\underbrace{(1-z)\cdot(1+z+\dots+z^{p-1})}_{=1-z^p}=-z^p\exp(\dots),$$

$$-E_p'(z)=z^p\cdot e^z\cdot e^{\frac{z^2}{2}}\cdot e^{\frac{z^3}{3}}\cdots e^{\frac{z^p}{p}}.$$

Każda z funkcji $z\mapsto e^{z^k/k}$ ma rozwinięcie Maclaurina z nieujemnymi współczynnikami, więc ich iloczyn również. $-E_p'$ ma zero rzędu p w zerze, zatem funkcja $1-E_p(z)$ ma w zerze zero rzędu $p+1$, więc funkcja

$$\frac{1-E_p(z)}{z^{p+1}}$$

ma w zerze osobliwość pozorną, a w rozwinięciu w szereg M. $\frac{1-E_p(z)}{z^{p+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ ma wsp. nieujemne: $a_n\geq 0$. Zatem

$$\left|\frac{1-E_p(z)}{z^{p+1}}\right|\leq\sum_{n=0}^{\infty}a_n|z|^n\leq\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot 1=\frac{1-E_p(1)}{1^{p+1}}=1 \quad \text{dla } |z|\leq 1. \qquad \boxtimes$$

Tw. Niech $z_n \in \mathbb{C}$, $z_n \neq 0$, $|z_n| \to \infty$ przy $n \to \infty$. Jeśli (p_n) jest ciągiem liczb całkowitych nieujemnych takim, że

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n} < \infty \qquad \text{dla każdego } r > 0$$

(tutaj przyjmujemy $r_n = |z_n|$), to iloczyn nieskończony

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

jest funkcją całkowitą, która ma pierwiastek w każdym z_n i nie ma innych pierwiastków. Dokładniej, jeśli liczba $\alpha \in \mathbb{C}$ występuje m razy w ciągu (z_n), to P ma zero krotności m w punkcie α.

Warunek $(*)$ jest zawsze spełniony dla $p_n = n-1$.

Dd: Ustalmy $r>0$. Wówczas dla dużych n zachodzi $\frac{r}{r_n} < \frac{1}{2}$, bo $r_n \to \infty$.

Zatem $\left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+(n-1)} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ dla dużych n, czyli #1 zachodzi zawsze dla $p_n = n-1$.

Jeśli $\underline{|z| \leq r}$ oraz $r_n \geq r$, to z lematu $|z| \leq r \leq r_n = |z_n|$

$$\left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right| \leq \left|\frac{z}{z_n}\right|^{1+p_n} \leq \underline{\left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n}}.$$

Z założenia szereg $\sum \left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n}$ jest zbieżny. Zatem z kryt. Weierstrassa szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right|$$

jest zbieżny jednostajnie na $\overline{D(0,r)}$. Stosujemy wniosek 121 do $u_n(z) = E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right) - 1$

$\Big\{$ Wniosek 121: $u_n \in H(\Omega)$, $\sum |u_n|$ - zb. nj. na Ω $\Rightarrow$ $\prod (1+u_n)$ - zb. nj. na Ω, i ma zera tylko tam, gdzie $u_n = -1$.

i otrzymujemy, że ~~szereg~~ iloczyn definiujący P zbiega nj. na $\mathbb{C}$.

Jeśli $\alpha \in \mathbb{C}$ występuje m-krotnie w ciągu (z_n), to $z_n \neq \alpha$ dla $n \geq N$ oraz

$$P(z) = \underbrace{\prod_{n=1}^{N} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)}_{\substack{\text{dokładnie } m \text{ spośród} \\ \text{tych czynników ma} \\ \text{zero jednokrotne w } \alpha}} \cdot \underbrace{\prod_{n=N+1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)}_{\text{ta funkcja nie ma zera w } \alpha}$$

, bo $E_{p_n}\left(\frac{\alpha}{z_n}\right) \neq 0$ dla $n > N$

$\Rightarrow P$ ma zero m krotne w α. P nie ma innych zer niż te występujące w (z_n). ⊠

Uwaga. Rozważając funkcję $z^k P(z)$ widzimy, że dla dowolnego ~~ci~~ ciągu (z_n) $z_n \to \infty$ istnieje f. całkowita, która ma zera w punktach z_n i nie ma innych zer, przy czym krotność zera $\alpha \in \mathbb{C}$ jest taka, jak liczba wystąpień liczby α w ciągu (z_n).

Uwaga Jeśli (z_n) nie ma p. skupienia w $\mathbb{C}$, to $z_n \to \infty$.

Tw. (Weierstrassa)

Niech $f \in H(\mathbb{C})$, $f(0) \neq 0$ i niech $z_1, z_2 \dots$ będzie ciągiem zer funkcji f wypisanych z uwzględnieniem ich krotności. Wówczas istnieje $g \in H(\mathbb{C})$ oraz ciąg $p_n \geq 0$ liczb całkowitych takie, że

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right).$$

~~Dowód.~~ Uwagi: 1) Jeśli ~~$f(0)=0$~~ $f \in H(\mathbb{C})$ ma zero krotności k w zerze, to

$$f(z) = e^{g(z)} z^k \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right).$$

2) Rozkład nie jest jedyny.

Dd. Niech $P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$, gdzie p_n jest tak dobrany, żeby $(*)$ zachodziło. Wówczas funkcja

$$\frac{f}{P}$$

ma w punktach z_n osobliwości pozorne, a jej rozszerzenie do funkcji całkowitej nie ma żadnych zer. Zatem z lematu 123 istnieje $g \in H(\mathbb{C})$ t. że $\frac{f}{P} = e^g$

$\boxtimes$

Np.

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)}_{\text{ma zera w } \pm n} = \ldots \quad , z \in \mathbb{C}$$

$$\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \left(1 - \frac{z}{n}\right)\left(1 + \frac{z}{n}\right) =$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{z}{n}\right)}_{E_0\left(\frac{z}{n}\right)}\left(1 - \frac{z}{-n}\right) = \underbrace{\left(1 - \frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}}_{E_1\left(\frac{z}{n}\right)} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{z}{-n}\right)e^{\frac{z}{-n}}}_{E_1\left(\frac{z}{-n}\right)}$$

$$E_0(z) = 1 - z$$

$$E_1(z) = (1 - z)\exp(z) \qquad E_1\left(\frac{z}{n}\right) = \left(1 - \frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}$$

$$\ldots = \underbrace{\prod_{n=1}^{\infty}\left(E_1\left(\frac{z}{n}\right)E_1\left(\frac{z}{-n}\right)\right)}_{\overset{?}{=} \prod_{n=1}^{\infty} E_1\left(\frac{z}{n}\right) \prod_{n=1}^{\infty} E_1\left(\frac{z}{-n}\right)} \overset{?}{=} \prod_{k=1}^{\infty} E_1\left(\frac{z}{z_k}\right)$$

, gdzie (z_k) jest ciągiem $(z_k) = (1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots)$

Iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty} E_1\left(\frac{z}{n}\right)$ jest zbieżny nj. na $\mathbb{C}$, bo dla dow. $r > 0$: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{|n|}\right)^{1+1} = r^2 \sum \frac{1}{n^2} < \infty$

czyli (*) zachodzi.

Mianowicie:

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = g(z) \underbrace{\prod_{n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right)}_{\text{iloczyn nie jest zbieżny}} \cdot e^{\frac{z}{n}}$$

iloczyn zbieżny

Np. Niech $G(z)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!\, n^z}{z(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+n)}$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$

$$\frac{1}{G(z)}=\lim_{n\to\infty}\frac{z(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+n)}{n!\, n^z}=\lim_{n\to\infty} z\,(z+1)\left(\frac{z}{2}+1\right)\left(\frac{z}{3}+1\right)\ldots\left(\frac{z}{n}+1\right)\cdot e^{-z\ln n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty} z\,\underbrace{(z+1)e^{-z}}_{E_1(-z)}\cdot\underbrace{\left(\frac{z}{2}+1\right)e^{-\frac{z}{2}}}_{E_1\left(\frac{z}{-2}\right)}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\left(\frac{z}{n}+1\right)e^{-\frac{z}{n}}}_{E_1\left(\frac{z}{-n}\right)}\cdot e^{z\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty} z\cdot\underline{e^{z\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)}}\cdot E_1(-z)\, E_1\left(\frac{z}{-2}\right)\ldots E_1\left(\frac{z}{-n}\right). \qquad (**)$$

Zauważmy, że dla dow. $r>0$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{|-n|}\right)^{1+1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{r^2}{n^2}<\infty$, więc $(*)$ zachodzi,

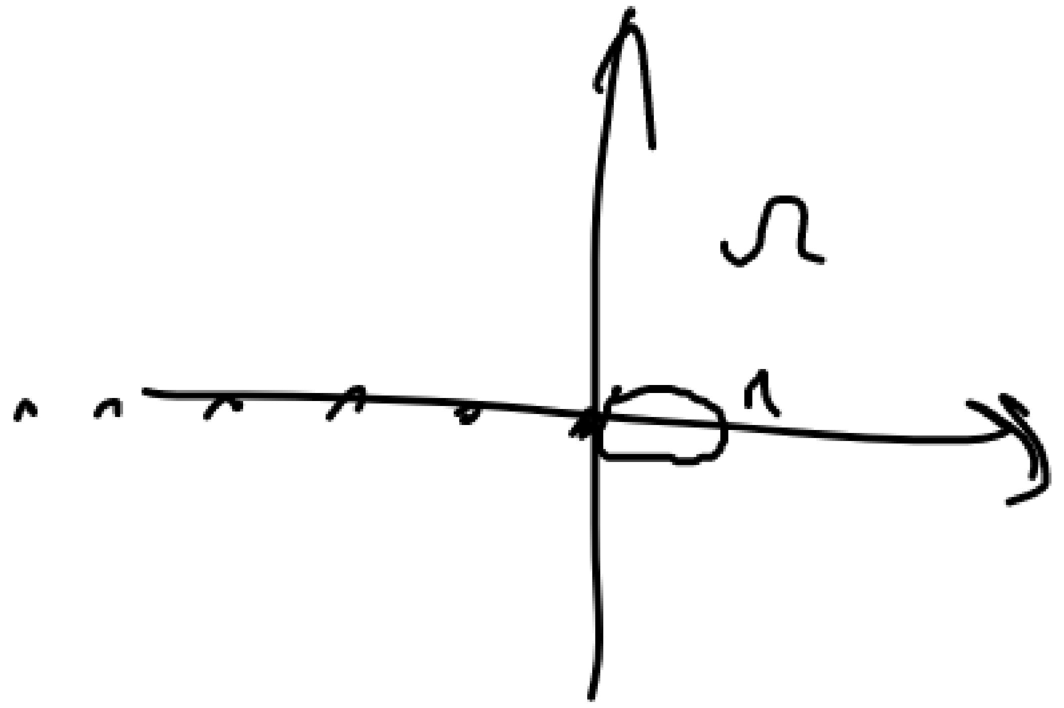
czyli iloczyn $\prod\limits_{n=1}^{\infty}E_1\left(\frac{z}{-n}\right)$ jest zbieżny niej. na $\mathbb{C}$.

Ponadto $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\to\gamma=0{,}577\ldots$ (stała Eulera)

zatem $(**)$ istnieje i zeruje się tylko w $0,-1,-2,\ldots$.

To dowodzi istnienia granicy G.

Zachodzi: $G(z)=\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$ dla $\operatorname{Re} z>0$.



Pokażemy, że $G(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ dla $x\in(0,1)$, reszta wyniknie z tw. o zerach. Będziemy rozważali

$$\frac{\Gamma(x)}{G(x)} \xleftarrow[n\to\infty]{} \frac{\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt\cdot x\cdot(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}{n!\,n^x} = \frac{\Gamma(x)\,x\ldots(x+n)}{n!\,n^x} = \frac{\Gamma(x+n+1)}{n!\,n^x}$$

i pokażemy, że prawa strona $\to 1$, gdy $n\to\infty$.

Będziemy potrzebowali wzoru Stirlinga w nast. wersji: $\dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

$x \in (0,1)$

$$\frac{\Gamma(x+n+1)}{n!\,n^x} = \frac{1}{n!\,n^x}\left(\int_0^n \underbrace{t^{x+n}}_{t^x \leq n^x} e^{-t}\,dt + \int_n^\infty \underbrace{t^{x-1}}_{\leq n^{x-1}} t^{n+1} e^{-t}\,dt \right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{n!\,n^x}\left(n^x \int_0^n t^n e^{-t}\,dt + n^{x-1} \int_n^\infty t^{n+1} e^{-t}\,dt \right) =$$

$$\left\{ \quad \int t^{n+1} e^{-t}\,dt = \int t^{n+1} \left(-e^{-t}\right)' dt = -t^{n+1} e^{-t} + \int (n+1)\, t^n e^{-t}\,dt \right.$$

$$= \frac{1}{n!}\left(\int_0^n t^n e^{-t}\,dt + \frac{1}{n}\left[n^{n+1} e^{-n} + (n+1)\int_n^\infty t^n e^{-t}\,dt \right] \right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{n!}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right) \underbrace{\int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt}_{\Gamma(n+1) = n!} + n^n e^{-n} \right) = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cancel{n!}}{\cancel{n!}} + \underbrace{\frac{n^n e^{-n}}{n!}}_{\to\, 0 \text{ ze wzoru Stirlinga}} \longrightarrow 1$$

Podobnie można oszacować z dołu.

Udowodniliśmy, że

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\; n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} \quad , \; z \in \mathbb{C}\setminus\{0,-1,\dots\}$$

$$\Gamma(3) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\; n^3}{3\cdot 4\cdot 5\cdots(3+n)} = \lim \frac{1\cdot 2\cdot \cancel{3\cdots n}}{\cancel{3\cdot 4 \cdots n}} \underbrace{\frac{n\cdot n\cdot n}{(n+1)(n+2)(n+3)}}_{\downarrow \atop 1} = 2!$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{\gamma z}\cdot z \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}} \quad , \; z\in\mathbb{C}$$

z tw. o pochodnej logarytmicznej: (dla $z\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,\dots\}$)

$$\frac{\left(\frac{1}{\Gamma(z)}\right)'}{\frac{1}{\Gamma(z)}} = \frac{\left(e^{\gamma z}\right)'}{e^{\gamma z}} + \frac{z'}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right)'}{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}} =$$

$$= \gamma + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cancel{e^{-\frac{z}{n}}}\left(\cancel{\frac{1}{n}} + \left(-\frac{1}{n}\right)\left(\cancel{1}+\frac{z}{n}\right)\right)}{\left(1+\frac{z}{n}\right)\cancel{e^{-\frac{z}{n}}}} = \gamma + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-z}{n(n+z)} =$$

$$= \gamma + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{\left(\frac{1}{\Gamma(z)}\right)'}{\frac{1}{\Gamma(z)}} = \frac{-\frac{1}{\Gamma^2(z)}\cdot\Gamma'(z)}{\frac{1}{\Gamma(z)}} = -\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \underbrace{-\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n} \right)}_{} \quad , \; z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, \dots\}$$

Bsp
$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma - 1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)}_{=1} = -\gamma$$

$$\Gamma'(1) = \Gamma(1) \cdot (-\gamma) = -\gamma < 0$$