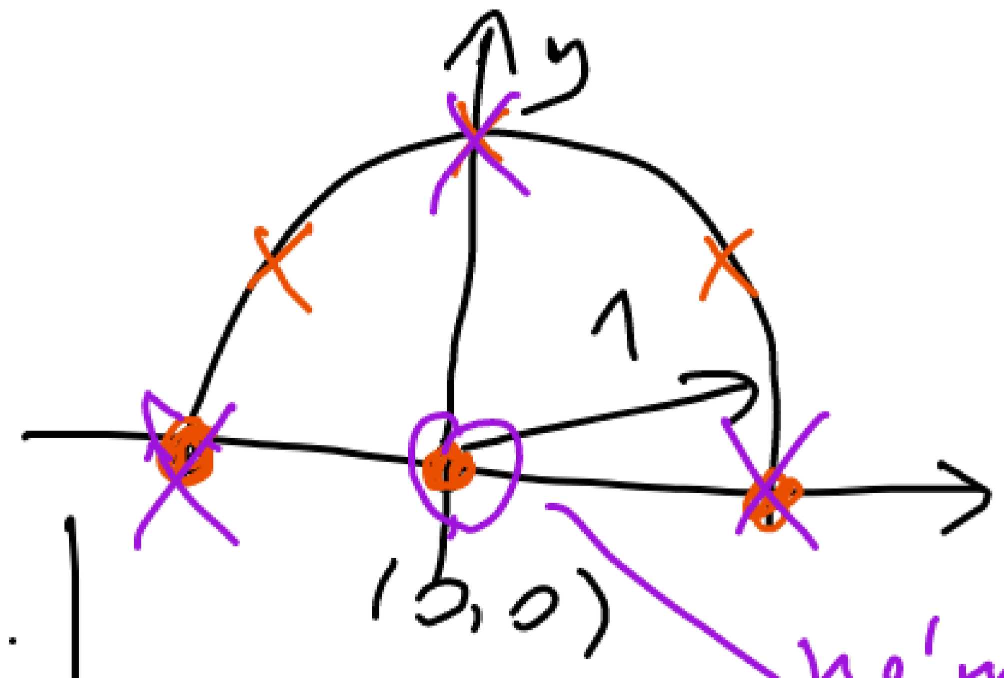
$$f(x,y)=x^4+y^4$$



X – największe

najmniejsze

$D=\{(x,y):\ x^2+y^2\le 1,\ y\ge 0\}$

1) Znajdźmy punkty stacjonarne wewnątrz D.

$$\begin{cases} f_x=4x^3=0 \\ f_y=4y^3=0 \end{cases}$$

$(0,0)$ nie należy do wnętrza D

2) Rozważmy f na dolnym odcinku: $\{(x,0):\ x\in[-1,1]\}$

f-cja pomocnicza $\underline{g(x)=f(x,0)}=x^4+0^4=x^4$ na $[-1,1]$

$g'(x)=4x^3=0 \iff \underline{x=0}$ p. stacjonarny $\Rightarrow$ $\boxed{f(0,0)=0}$

Na końcach:

$f(-1,0)=g(-1)=(-1)^4=1$ $\qquad$ $f(1,0)=g(1)=1^4=1$

3) I $y=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1,1]$ $\longrightarrow$ górny półokrąg $(x,\sqrt{1-x^2})$, $x\in[-1,1]$

$\pm 1/\sqrt{2}$

$$\underline{h(x)=f(x,\sqrt{1-x^2})}=x^4+\sqrt{1-x^2}^{\,4}=x^4+(1-x^2)^2=$$
$$=2x^4-2x^2+1$$

+ h na brzegu: $h(-1)=f(-1,0)$, $h(1)=f(1,0)$

$$h'(x)=8x^3-4x=0 \quad |:4$$
$$2x^3-x=0$$
$$2x^3=x$$
$$x=0 \ \vee\ 2x^2=1$$
$$x=\pm 1/\sqrt{2}$$

$x=0$: $h(0)=f(0,1)=1$

$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$: $h\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4=$
$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$