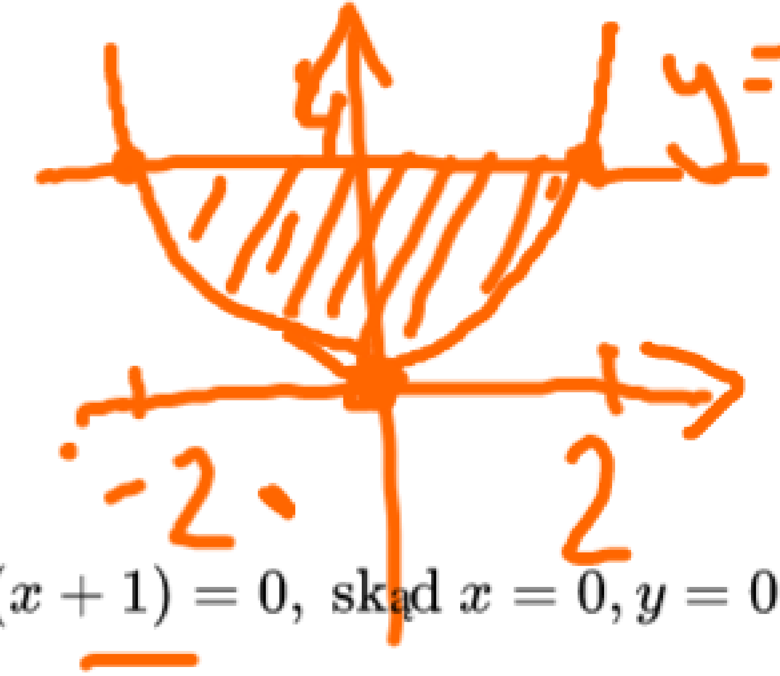
$f(x, y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy, \quad D = \{(x, y) : x^2 \le y \le 4\}$



$y = x^2$ —— $y = 4$

$x^2 = 4$

1. Szukamy punktów stacjonarnych funkcji f wewnątrz D

   $f'_x = 6x^2 + 8x - 2y, \quad f'_y = 2y - 2x \qquad 6x^2 + 8x - 2y = 0$ oraz $2y - 2x = 0$

Z drugiego równania $y = x$, wstawiamy do pierwszego: $6x^2 + 8x - 2x = 0$, czyli $6x(x + 1) = 0$, skąd $x = 0, y = 0$ lub $x = -1, y = -1$.

   Żaden z nich nie jest *wewnątrz* D.

2. Badamy f na brzegu, który w naturalny sposób składa się z 2 kawałków: a) $y = x^2, x \in [-2, 2]$; b) $y = 4; x \in [-2, 2]$.

   a) funkcja pomocnicza $g(x) = f(x, x^2) = 2x^3 + 4x^2 + (x^2)^2 - 2x \cdot x^2 = 4x^2 + x^4$ dla $x \in [-2, 2]$

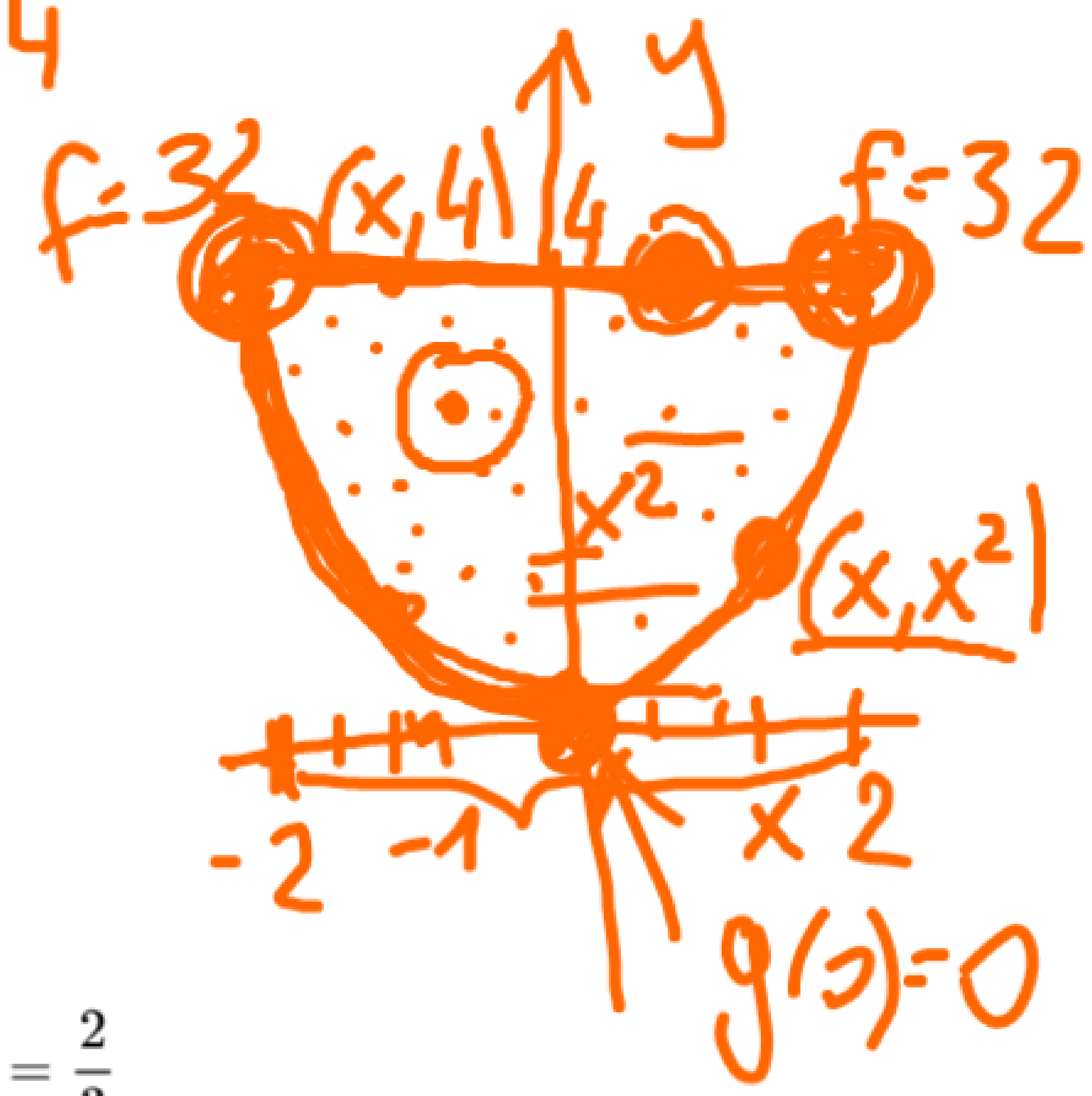
   $g'(x) = 8x + 4x^3 = 8x(1 + x^2/2) = 0$, skąd $x = 0$

   $(0, 0^2) = (0, 0)$

   $g(0) = 0$; na końcach przedziału: $g(-2) = 4(-2)^2 + (-2)^4 = 32$; $\quad g(2) = ... = 32$

   b) funkcja pomocnicza $h(x) = f(x, 4) = 2x^3 + 4x^2 + 16 - 8x, \quad x \in [-2, 2]$

   $h'(x) = 6x^2 + 8x - 8 = 0, \quad$ czyli $3x^2 + 4x - 4 = 0, \quad \Delta = 16 + 4 \cdot 4 \cdot 3 = 16 + 48 = 64$, więc $x_1 = \dfrac{-4 - 8}{6} = -2; \quad x_2 = \dfrac{-4 + 8}{6} = \dfrac{2}{3}$



   $-2, \dfrac{2}{3} \in [-2, 2]$, liczymy więc $h(-2) = -16 + 16 + 16 + 16 = 32$; $\quad h(2/3) = 2 \cdot \dfrac{-8}{27} + 4 \cdot \dfrac{4}{9} + 16 - 8 \cdot \dfrac{-2}{3} = \dfrac{16 \cdot 11}{27} + 16 < 16 + 16 = 32$

   na końcach: $h(-2) = 32$ (liczyliśmy) , $h(2) = g(2) = 32$

Odp: 0 ; 32.