LISTY ZADAŃ DO KURSU
ANALIZA MATEMATYCZNA 1

Zadania przeznaczone są do rozwiązywania na ćwiczeniach oraz samodzielnie. Dwie dodatkowe listy: POWTÓRKA 1 i POWTÓRKA 2 to przygotowanie do kolokwiów. Zadania z egzaminów na ocenę celującą z lat poprzednich można znaleźć na stronie Wydziału Matematyki: www.wmat.pwr.edu.pl.

LISTA 0 *(materiał do samodzielnego powtórzenia).*

Działania w zbiorze liczb rzeczywistych

W zadaniach $0.2-0.5$ $n\in\mathbf{N}$, *natomiast* a,b,x,y *są liczbami rzeczywistymi, dla których występujące w zadaniach wyrażenia i wykonywane przekształcenia mają sens.*

0.1. Przypomnieć kolejność wykonywania działań w wyrażeniach bez nawiasów oraz w wyrażeniach z nawiasami. Obliczyć wartość wyrażenia: $4+6:2\cdot 3-8\cdot 2$. Wstawić nawiasy tak, aby wartość otrzymanego wyrażenia była równa.

(a) -1, (b) -11, (c) -10.

0.2. Uzupełnić i zapamiętać wzory „skróconego mnożenia":

(a) $(a+b)^2=\cdots$, (b) $(a+b)^3=\cdots$, (c) $(a+b)(a-b)=\cdots$, (d) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=\cdots$.

Czy można w powyższych wyrażeniach zastąpić „b" przez „$-b$"? Co otrzymamy?

Uprościć wyrażenia wymierne:

(a) $\dfrac{3a^2-6ab+3b^2}{6a^2-6b^2}$, (b) $\dfrac{9+6x+x^2}{x^2-9}$, (c) $\dfrac{a^3+8}{a^2-4}$, (d) $\dfrac{1-x^3}{3x^2+3x+3}$,

(e) $\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1}$, (f) $\dfrac{2x^2+4xy+2y^2}{9x^2-9y^2}$, (g) $\dfrac{x^3+x^2+2x+2}{x^4+4x^2+4}$.

0.3. Zapisać wyrażenia w prostszej postaci podając wykorzystywane prawa działań na potęgach

(a) $\dfrac{2^n+3\cdot 2^{n+2}}{4^{2n}}$, (b) $\dfrac{(\sqrt{2})^{3n+2}-(\sqrt{8})^n}{2^n}$, (c) $\dfrac{21\cdot 27^n}{9^{n+2}+3^{2n+1}}$, (d) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a^3}}\cdot b\cdot\sqrt{\dfrac{b^2}{a}}\cdot\sqrt[3]{a^2}\right)^3$.

0.4. Wykonać działania. Wynik zapisać w najprostszej postaci.

(a) $\dfrac{b}{ay+ax}-\dfrac{a}{by+bx}$, (b) $\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{3ab}{a^3-b^3}-\dfrac{b-a}{a^2+ab+b^2}$,

(c) $\dfrac{8x}{x-9x^3}+\dfrac{3x}{x+3x^2}-\dfrac{2-6x}{(1-3x)^2}$, (d) $\dfrac{x\sqrt{4-x^2}-(2-x^2)\cdot\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2}$.

0.5. W podanych wyrażeniach usunąć niewymierność z mianownika

(a) $\dfrac{1}{4+\sqrt{1+x}}$, (b) $\dfrac{n-2}{\sqrt{n}+\sqrt{2}}$, (c) $\dfrac{n+1}{\sqrt{5n+4}-\sqrt{4n+3}}$,

(d) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$, (e) $\dfrac{x}{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}}$, (f) $\dfrac{n-1}{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{n}+1}$.

LISTA 1.

(na 4 ćwiczenia)

Powtórzenie i uzupełnienie wiadomości o funkcjach

1.1. Zdanie logiczne. Forma zdaniowa. Kwantyfikatory.

Dla zdań, będących zdaniami logicznymi, podać ich wartość logiczną.

(a) $\frac{6}{4} \geqslant \frac{3}{2}$, (b) $x^2 - 7 < 0$, (c) $\bigwedge_{x\in\mathbf{R}} x^2 - 7 < 0$,

(d) $\bigvee_{x\in\mathbf{R}} x^2 - 7 < 0$, (e) $\bigvee_{x\in\mathbf{R}-\{0,-2\}} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$, (f) $\bigwedge_{x\in\mathbf{R}} \bigvee_{y\in\mathbf{R}} x^2 - y^2 = 0$.

1.2. Negacja. Równoważność. Prawa de Morgana dla koniunkcji i alternatywy.

Zapisać przy użyciu spójników logicznych „i", „lub" rozwiązanie równania (nierówności). Zaznaczyć na płaszczyźnie zbiór punktów, których współrzędne spełniają podany warunek.

(a) $(x+3)(y-2) = 0$, (b) $(x+3)(y-2) \neq 0$, (c) $(x+3)(y-2) > 0$, (d) $x^2 - 4y^2 < 0$,

(e) $\frac{a+b}{a-b} = 0$, (f) $\frac{a+2}{a-b+1} > 0$, (g) $\frac{2a+b}{a+b} \leqslant 0$, (h) $\frac{a^2+b-1}{a^2-b^2} \geqslant 0$.

1.3. Implikacja. Twierdzenie. Prawo kontrapozycji.

(**A**) Prawdziwe jest twierdzenie: *Jeśli liczba naturalna jest podzielna przez 12, to jest podzielna przez 3.*
Wskazać założenie oraz tezę twierdzenia.
Na podstawie powyższego twierdzenia podać:
(a) warunek wystarczający podzielności przez 3. Dlaczego nie jest to warunek konieczny?
(b) warunek konieczny podzielności przez 12. Dlaczego nie jest to warunek wystarczający?
(c) Liczba naturalna nie jest podzielna przez 12. Czy twierdzenie pozwala wyciągnąć wniosek o podzielności tej liczby przez 3?
(d) Liczba naturalna jest podzielna przez 3. Czy twierdzenie pozwala wyciągnąć wniosek o podzielności tej liczby przez 12?
(e) Liczba naturalna nie jest podzielna przez 3. Czy twierdzenie pozwala wyciągnąć wniosek o podzielności tej liczby przez 12?
(f) Sformułować warunek konieczny i wystarczający podzielności przez 3.

(**B**) Niech $x, y \in \mathbf{R}$. Prawdziwa jest implikacja:

$$(x > 0 \quad \text{i} \quad y > 0) \Longrightarrow (xy > 0)\,.$$

Wskazać założenie oraz tezę twierdzenia.

(a) Wiadomo, że $\alpha > 1$ i $\beta > -1$. Czy twierdzenie pozwala wyciągnąć wniosek o znaku iloczynu $(\alpha - 1)\cdot(\beta + 1)$? A o znaku iloczynu $\alpha \cdot \beta$? Podać przykłady.

(b) Wiadomo, że $ab > 0$. Czy twierdzenie pozwala wyciągnąć wniosek o znaku liczby a? Podać przykłady.

(c) Wiadomo, że $uv \leqslant 0$. Jaki wniosek o liczbach u i v pozwala wyciagnąć twierdzenie?

1.4. Prawa de Morgana dla kwantyfikatorów.

Zapisać w równoważnej postaci zdania:

(a) $\neg\left(\bigwedge_{x\in\mathbf{R}} 2^x = 2^{-x}\right)$, (b) $\neg\left(\bigvee_{x<0} x^2 = x^4\right)$,

(c) $\neg\left(\bigvee_{M\in\mathbf{R}}\bigwedge_{n\in\mathbf{N}} \dfrac{n^2+1}{n} < M\right)$, (d) $\neg\left(\bigwedge_{\epsilon>0}\bigvee_{n_0\in\mathbf{N}}\bigwedge_{n\in\mathbf{N}} (n > n_0) \Longrightarrow \left(\dfrac{n}{n+5} < \epsilon\right)\right)$.

1.5. Wyznaczyć dziedziny naturalne funkcji. Zbadać, która z nich jest parzysta, która nieparzysta, a która nie ma żadnej z tych własności.

(a) $f(x) = \dfrac{|x|+3}{x^2-9}$, (b) $f(x) = \dfrac{x}{6x^2-x-1}$, (c) $f(x) = \sqrt[3]{3x-x^3}$, (d) $f(x) = \sqrt{8-\dfrac{1}{x^3}}$.

1.6. Korzystając z równania pęku prostych $y - y_0 = a\,(x - x_0)$ oraz interpretacji współczynnika $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ napisać równanie prostej:

a) przechodzącej przez punkty $(2,3)$, $(-1,-3)$,
b) przechodzącej przez punkt $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{3}\right)$ i równoległej do prostej $y = -2x$,
c) przechodzącej przez punkt $(-2,1)$ i prostopadłej do prostej $x - 3y + 1 = 0$.

1.7. Przekształcając wykres odpowiedniej funkcji liniowej narysować wykres podanej funkcji. Odczytać z wykresu zbiór wartości.

(a) $f(x) = |4-2x|$, (b) $f(x) = 4 - 2\,|x|$,

(c) $f(x) = \sqrt{x^2+4x+4}$, (d) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{dla} \quad |x| \leqslant 1 \\ 1 & \text{dla} \quad |x| > 1 \end{cases}$.

1.8. Przekształcając wykres funkcji $y = ax^2$ naszkicować wykres funkcji $y = f(x)$. Odczytać z wykresu zbiór wartości.

(a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$, (b) $f(x) = x^2 - 2\,|x| + 1$,

(c) $f(x) = -4 - 4x - 2x^2$, (d) $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 3x)$.

1.9. Przekształcając wykres funkcji $y = \dfrac{a}{x}$ lub $y = \dfrac{a}{x^2}$ naszkicować wykres funkcji $y = f(x)$. Odczytać z wykresu zbiór wartości.

(a) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$, (b) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, (c) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$, (d) $f(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{x^2+4x+4}$.

1.10. Napisać wzory określające funkcje złożone $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$ dla podanych funkcji f i g. Naszkicować wykresy funkcji $y = f(g(x))$ oraz $y = g(f(x))$.

(a) $f(x) = x^2$, $g(x) = x - 2$, (b) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 4x^2$,

(c) $f(x) = |x|$, $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$, (d) $f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = \operatorname{sgn} x$.

1.11. Zaproponować przedstawienie funkcji złożonych w postaci $g \circ h$. Czy jest tylko jedna para funkcji g, h takich, że $f = g \circ h$?

(a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$, (b) $f(x) = \dfrac{1}{x^4 + 3}$, (c) $f(x) = 4x^2 + 12x$.

1.12. Obliczyć

$$\log_2 2\sqrt{2}, \quad \log 0{,}01, \quad \log_3 2 - \log_3 18, \quad 3\log 5 + 0{,}5\log 64, \quad \log_3 \operatorname{tg}\frac{\pi}{6},$$
$$\ln e^3, \quad 2^{\log_2 3}, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 5}, \quad 3^{\log_{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{6}}{2}}, \quad e^{2\ln 10}, \quad e^{1-\ln 10}, \quad \log_2 3 \cdot \log_3 8.$$

1.13. Zaznaczyć na płaszczyźnie zbiór punktów, których współrzędne (x, y) spełniają podany warunek

(a) $\log_2 y = \log_2 x + \log_2 3$, (b) $\log_{0,5} y = 2\log_{0,5}(x+1)$, (c) $\log|y| = \log|x| + \log 0{,}5$.

1.14. Naszkicować wykresy funkcji

(a) $f(x) = 2^{|x|}$, (b) $f(x) = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1\right|$, (c) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{e^x}$, (d) $f(x) = -e^{-|x|}$,

(e) $f(x) = \log_2(x-1)$, (f) $f(x) = \left|\log_{0,5} x\right|$, (g) $f(x) = \ln|x|$, (h) $f(x) = \ln x^2$.

1.15. Rozwiązać równania i nierówności

(a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{(x-2)^2 - 5x} = \left(\frac{1}{4}\right)^5$, (b) $4^x + 24 = 5 \cdot 2^{x+1}$, (c) $|2^x - 5| < 2$,

(d) $|3\log x - 1| = 2$, (e) $\log_2(x+1) - \log_2 x < 1$, (f) $\ln^2 x + \ln x \geqslant 2$.

1.16. Wyprowadzić wzór określający funkcję odwrotną do funkcji f. Naszkicować w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = f^{-1}(x)$.

(a) $f(x) = \log_2(x+1)$, (b) $f(x) = 1 - 2^x$, (c) $f(x) = 2 - \sqrt{x}$,

(d) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ dla $x \geqslant 1$, (e) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ dla $x \leqslant 1$.

1.17. Wykorzystując okresowość funkcji i koło trygonometryczne obliczyć wartości wyrażeń

(a) $\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{4}{3}\pi$, (b) $\sin\frac{13}{6}\pi + \sin\frac{11}{3}\pi$, (c) $\cos\frac{14}{3}\pi + \cos\frac{19}{6}\pi$,

(d) $\sin\left(-\frac{9}{4}\pi\right) + \cos\left(-\frac{13}{4}\pi\right)$, (e) $\sin\frac{17}{2}\pi + \cos\frac{17}{2}\pi$, (f) $\operatorname{tg}\frac{20}{3}\pi + \operatorname{ctg}\frac{19}{3}\pi$.

1.18. Udowodnić tożsamości. Określić ich dziedziny.

(a) $\cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, (b) $\sin^2 x = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, (c) $\cos x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, (d) $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$,

(e) $1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x = \dfrac{\sin x + \cos x}{\cos^3 x}$, (f) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 0{,}5\sin^2 2x$.

1.19. Krzywą daną równaniem $y = a\sin(bx + c) + d$ dla ustalonych parametrów $a \neq 0, b \neq 0, c, d$ nazywamy sinusoidą. Uzasadnić, że każda z poniższych krzywych jest sinusoidą i naszkicować ją.

(a) $y = \sin x \cos x$, (b) $y = (\sin x + \cos x)^2$, (c) $y = \cos^2 x$.

1.20. Naszkicować wykres funkcji $y = f(x)$. Odczytać z wykresu okres podstawowy oraz zbiór wartości funkcji.

(a) $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, (b) $f(x) = \sin x + |\sin x|$, (c) $f(x) = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$, (d) $f(x) = |\mathrm{ctg}(\pi x)|$.

1.21. Rozwiązać równania i nierówności.

(a) $\cos 2x = 0$, (b) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$, (c) $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = 1$,

(d) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 0$, (e) $\cos\frac{x}{3} > 0$, (f) $\mathrm{ctg}^2 x < 1$.

1.22. Obliczyć wartości wyrażeń

(a) $w = \arcsin\frac{x}{2} - \arccos\frac{x}{2} + \mathrm{arctg}\frac{1}{x}$, jeśli $\mathrm{arcctg} x = \frac{\pi}{6}$;

(b) $w = \arcsin(-x) + \arccos 2x + \mathrm{arctg} 2x$, jeśli $\arccos x = \frac{2\pi}{3}$;

(c) $\mathrm{tg}\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$; (d) $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{8}{17}\right)$.

1.23. Rozwiązać równania wykorzystując funkcje cyklometryczne

(a) $\mathrm{tg} 2x = 5$, (b) $\sin x = \frac{1}{3}$, (c) $\sin x = -\frac{1}{4}$, (d) $\cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, (e) $\cos x = -\frac{3}{4}$.

Podobne zadania (także rozwiązane) można znaleźć w skrypcie:
M.Gewert, Z.Skoczylas, Wstęp do analizy i algebry. Teoria, przykłady, zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2014.

LISTA 2

(na 1 ćwiczenia)

Ciągi liczbowe

2.1. Uzasadnić, że podane ciągi są monotoniczne i ograniczone.

(a) $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$, (b) $b_n = \dfrac{2^n}{3^n+2}$, (c) $c_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$, (d) $d_n = \sin\dfrac{\pi}{2n+1}$,
(e) $e_n = \dfrac{(n+2)^2}{2^{n+2}}$, (f) $f_n = \sqrt{n+8} - \sqrt{n+3}$, (g) $g_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$.

2.2. Korzystając z odpowiedniej definicji granicy ciagu liczbowego, uzasadnić, że

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+2} = 1$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{2n} = +\infty$, (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+4}{n+2} \neq 2$.

2.3. Uzasadnić, podając odpowiednie przykłady, że poniższe wyrażenia są nieoznaczone

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0\cdot\infty, \quad \infty - \infty, \quad 1^\infty, \quad \infty^0, \quad 0^0.$$

2.4. Obliczyć granice ciągów liczbowych.

(a) $a_n = \dfrac{2n-3}{3n+4}$, (b) $b_n = \dfrac{n^2+3n-8}{2n+5}$, (c) $c_n = \dfrac{n^2+n-3}{n^3+2n+1}$,

(d) $d_n = \dfrac{(2n^3+3)^8}{(2n^4+7)^6}$, (e) $e_n = \dfrac{n+\sqrt{n^3+7}}{\sqrt[3]{n^2+5}+4n}$, (f) $f_n = \dfrac{8^{n+2}+2^n}{2^{3n+1}+3^n+4}$,

(g) $g_n = \dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$, (h) $h_n = \sqrt{n+8} - \sqrt{n+3}$,

(i) $i_n = \sqrt{n^2+4n+1} - \sqrt{n^2+3}$, (j) $j_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{n+23}$,

(k) $k_n = \sqrt{9^n+4\cdot 3^n+1} - \sqrt{9^n+3}$, (l) $l_n = n^{30} - 2\cdot n^{21} - 3\cdot n^9 + 3$,

(m) $m_n = 7^n - 2\cdot 5^{2n} + 3\cdot 9^{n+5} + 4$, (n) $m_n = \left(\dfrac{n+4}{n+1}\right)^{n+3}$, (o) $o_n = \left(\dfrac{n^2+3}{n^2+1}\right)^{n^2}$,

(p) $p_n = \left(\dfrac{2n+1}{2n+5}\right)^{1-3n}$, (r) $r_n = \left(\dfrac{4n+1}{2n-1}\right)^{n+6}$, (s) $s_n = \left(\dfrac{3^n+2^n}{5^n+3^n}\right)^n$.

2.5. Dla danego ciągu (a_n) dobrać ciąg (b_n) postaci $b_n = n^p$ lub $b_n = \alpha^n$ tak, aby ciągi (a_n) i (b_n) były tego samego rzędu. (*Mówimy, że ciągi (a_n), (b_n) są tego samego rzędu, jeśli* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = k$ *, dla pewnej liczby dodatniej k.*)

(a) $a_n = \dfrac{1}{n^2+4n+3}$, (b) $a_n = \dfrac{n^2}{n^3+7}$, (c) $a_n = \sqrt{n+9} - \sqrt{n+1}$,
(d) $a_n = \dfrac{1}{3\cdot 2^n + 2\cdot 3^n}$, (e) $a_n = \dfrac{3^n}{4^n+5^n}$, (f) $a_n = \dfrac{4^{n+2}}{5\cdot 2^{n+1}+2\cdot 3^n}$.

Podobne zadania (także rozwiązane) można znaleźć w skrypcie:
M.Gewert, Z.Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2018, rozdział 2.

LISTA 3
(*na 2 ćwiczenia*)

Granice funkcji. Asymptoty. Funkcje ciągłe

3.1. Narysować wykresy funkcji spełniających wszystkie podane warunki

(a) $f(0)=1, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to 0} f(x)=-1, \quad \lim_{x\to 2} f(x)=-\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\pi;$

(b) $g(0)=4, \quad \lim_{x\to-\infty} g(x)=0, \quad \lim_{x\to-3^-} g(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to-3^+} g(x)=0, \quad \lim_{x\to+\infty} g(x)$ nie istnieje;

(c) $\lim_{x\to-\infty} h(x)=-\infty, \quad \lim_{x\to-1} h(x)$ nie istnieje, $\lim_{x\to 0} h(x)\neq h(0), \quad \lim_{x\to 1} h(x)=+\infty, \quad h(3)<0.$

3.2. Obliczyć granice

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$, (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$, (c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{8-x^3}{x^2-4}$, (d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{8-x^3}{x^2-4}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+3}{|x^2-1|}$, (f) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{e^x}{x-1}$, (g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x}+x^2}{x+\sqrt{x}}$, (h) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt[3]{x}+x^2}{x+\sqrt{x}}$,

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \pi x}{x}$, (j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sin^2 3x}$, (k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}{\operatorname{tg}\frac{2}{x}}$, (l) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\sin 6x}$.

3.3. Uzasadnić, że podane granice funkcji nie istnieją

(a) $\lim\limits_{x\to-0{,}5} \dfrac{2x-1}{4x^2-1}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} 2^{1/x}$, (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2^x-3^x}$, (d) $\lim\limits_{x\to\pi} \operatorname{sgn}(\sin \mathrm{x})$.

3.4. Korzystając z odpowiednich twierdzeń (o trzech funkcjach, o iloczynie funkcji ograniczonej i funkcji zbieżnej do zera, o dwóch funkcjach) wyznaczyć granice

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\cos\dfrac{1}{x^2}$, (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sin x^2}{x}$, (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+\sin x^2}{3x+\cos\sqrt{x}}$, (d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2+\sin\frac{1}{x}}{x^3}$.

3.5. Narysować wykresy funkcji spełniających wszystkie podane warunki

(a) prosta $x=1$ jest asymptotą pionową obustronną funkcji f, $y=2$ jest asymptotą poziomą w $-\infty$, $y=-x+2$ jest asymptotą ukośną w $+\infty$;

(b) prosta $x=-2$ jest asymptotą pionową lewostronną funkcji g i nie jest asymptotą pionową prawostronną, funkcja g nie ma asymptoty w $-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=3$;

(c) prosta $x=0$ jest asymptotą pionową obustronną funkcji h, $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ nie istnieje, $\lim\limits_{x\to-\infty}[h(x)+2x]=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}[h(x)+x-1]=0$.

3.6. Wyznaczyć wszystkie asymptoty funkcji f. Naszkicować hipotetyczny wykres.

(a) $f(x) = \dfrac{8x^3+1}{4x^2-1}$, (b) $f(x) = \dfrac{x^2-6}{x-1}$, (c) $f(x) = \dfrac{3}{2^x-8}$,

(d) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x-2}$, (e) $f(x) = \sqrt{x^2-2x}$, (f) $f(x) = \dfrac{\cos x}{2\pi - x}$.

3.7. Czy można dobrać parametry $a, b \in \mathbf{R}$ tak, aby podana funkcja była ciągła na $\mathbf{R}$. Wykonać rysunek.

(a) $f(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{dla} \quad x < 0 \\ a - x & \text{dla} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$, (b) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x & \text{dla} \quad |x| \leqslant 1 \\ ax^2 + bx & \text{dla} \quad |x| > 1 \end{cases}$,

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{dla} \quad x \neq 2 \\ a & \text{dla} \quad x = 2 \end{cases}$, d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x^2-1} & \text{dla} \quad |x| \neq 1 \\ a & \text{dla} \quad x = -1 \\ b & \text{dla} \quad x = 1 \end{cases}$.

3.8. Uzasadnić, korzystając z twierdzenia Darboux, że równanie ma rozwiązanie we wskazanym przedziale. W przykładach (a), (b), (c) uzasadnić jednoznaczność rozwiązania. Podać graficzną interpretację równania.

(a) $\sin x = 2 - 2x$, $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$; (b) $e^x = \dfrac{1}{x^2}$, $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$;

(c) $x^2 = -\ln x$, $(0, +\infty)$; (d) $10 \sin(\pi x) = x + 1$, $\left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$.

3.9. Uzasadnić, że równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie i wyznaczyć je (nie korzystajac z kalkulatora) z błędem nie większym niż 0,25.

(a) $x^3 + 6x = 2$, (b) $x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$, (c) $x^3 = 4 + 2^{-x}$.

Podobne zadania (także rozwiązane) można znaleźć w skrypcie:
M.Gewert, Z.Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2018, rozdział 3.

POWTÓRKA 1

P1.1. Naszkicować wykresy funkcji.

(a) $f(x) = \left|\dfrac{|x|}{2} - 4\right|$, (b) $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$, (c) $f(x) = x^2 - 4|x| + 7$,

(d) $f(x) = 1 - \sqrt{|x| - 2}$, (e) $f(x) = 2^{-x} - 2$, (f) $f(x) = ||\log_2(x-2)| - 1|$,

(g) $f(x) = 1 + \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, (h) $f(x) = \cos\left(|x| + \dfrac{\pi}{3}\right)$, (i) $f(x) = 2\sin 2x - |\sin 2x|$,

(j) $f(x) = \dfrac{|\operatorname{ctg} x|}{\operatorname{ctg} x}$, (k) $f(x) = \pi - \operatorname{arctg} x$, (l) $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + \arcsin x$.

P1.2. Wyznaczyć dziedzinę funkcji.

(a) $f(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+4x}}$, (b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-4}}$, (c) $f(x) = 1 - \ln\sin x$,

(d) $f(x) = \dfrac{x-5}{\log_2(x^2-3)}$, (e) $f(x) = \dfrac{1}{2^{-x} - 2}$, (f) $f(x) = \ln^2\left(6 - \dfrac{1}{x}\right)$,

(g) $f(x) = 3\operatorname{ctg}\dfrac{x}{4}$, (h) $f(x) = \dfrac{e^x}{\pi^2 - 16\operatorname{arctg}^2 x}$, (i) $f(x) = \arcsin\ln x$.

P1.3. Rozwiązać równania i nierówności.

(a) $x(x-1) < 2(x+2)$, (b) $x^4 - 5x^2 \geqslant -4$, (c) $\dfrac{8}{x} \leqslant 27x^2$,

(d) $\left|e^{-x} - 3\right| = 1$, (e) $2^x - \dfrac{3}{2^x} > 2$, (f) $\dfrac{1}{\ln x} < 3$,

(g) $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$, (h) $\cos^2\dfrac{x}{5} = 1$, (i) $\operatorname{tg} 3x = 2$.

P1.4. Uzasadnić tożsamość trygonometryczną i podać jej dziedzinę.

(a) $\cos x \cdot (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = \dfrac{1}{\sin x}$, (b) $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\sin^2 x}$, (c) $\dfrac{\sin x}{1 - \cos x} = \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$.

P1.5. Napisać wzory określające funkcje złożone $f \circ g$, $g \circ f$ oraz naszkicować ich wykresy.

(a) $f(x) = x^2 - 4x$, $g(x) = |x|$, (b) $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = 2x + 1$,

(c) $f(x) = \log_{0,5} x$, $g(x) = |x| + 2$, (d) $f(x) = \cos 2x$, $g(x) = 0{,}5x$,

(e) $f(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$, $g(x) = 2x$, (f) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$.

P1.6. Wyprowadzić wzór funkcji odwrotnej do funkcji f. Naszkicować w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = f^{-1}(x)$.

(a) $f(x) = 4 - 2x$, (b) $f(x) = \sqrt{x} + 1$, (c) $f(x) = 1 + 2^x$, (d) $f(x) = 2\ln(x+1)$,

(e) $f(x) = x^2 + 2x$ dla $x \geqslant -1$, (f) $f(x) = x^2 + 2x$ dla $x \leqslant -1$.

P1.7. Uzasadnić, że ciąg (a_n) jest monotoniczny (od pewnego miejsca) i ograniczony

(a) $a_n = \dfrac{n+1}{3n+4}$, (b) $a_n = \dfrac{2^n + 4^n}{5^n}$, (c) $a_n = \dfrac{12^n}{(n+1)!}$,

(d) $a_n = \cos^2 \dfrac{\pi}{4n+7}$, (e) $a_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n}$, (f) $a_n = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2^2} \cdot \dfrac{1}{2^3} \cdot \ldots \cdot \dfrac{1}{2^n}$.

P1.8. Obliczyć granice ciągów liczbowych:

(a) $a_n = \dfrac{\sqrt{5}n + 4}{4n + \sqrt{5}}$, (b) $a_n = \dfrac{3^{n+1} + 6 \cdot 2^n}{5 \cdot 4^{n-1} - 3^n}$, (c) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{4^n + 3 \cdot 2^n} - \sqrt{4^n + 4}}$,

(d) $a_n = 7^{3n+4} - 9^{2n+7}$, (e) $a_n = \dfrac{1 + n^2}{1 + 2 + 3 + \cdots + n}$, (f) $a_n = \dfrac{n\sqrt{n+3} - \sqrt{n^3+9}}{\sqrt{n}}$,

(g) $a_n = \left(\dfrac{n^3 + 2}{n^2 + 2n}\right)^{3n+1}$, (h) $a_n = \left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^n$, (i) $a_n = \left(\dfrac{3n+5}{3n+2}\right)^{2-5n}$,

(j) $a_n = \sqrt{\pi^n} - \sqrt{e^n}$, (k) $a_n = \dfrac{\operatorname{arctg}(2n+1)}{1 + 2\operatorname{arcctg} n^2}$, (l) $a_n = \ln(4n+5) - \ln(2n+3)$.

P1.9. Naszkicować wykresy funkcji spełniających wszystkie podane warunki

(a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, f jest funkcją nieparzystą;

(b) prosta $y = 1$ jest asymptotą poziomą w $-\infty$, prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową obustronną, $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$ nie istnieje, g jest funkcją parzystą;

(c) $\lim\limits_{x \to -\infty} [h(x) - x + 2] = 0$, $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = -2$, $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 1$, h nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$.

P1.10. Obliczyć granice funkcji:

(a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$, (b) $\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$, (c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$, (d) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x-5}-2}{x-9}$,

(e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3^x+2^x}{4+2\cdot 3^x}$, (f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3^x+2^x}{4+2\cdot 3^x}$, (g) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{4^x-3^x}$, (h) $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+x}+x)$,

(i) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{x+\pi}}$, (j) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$, (k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 3x-5\sin 5x}{x}$, (l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}4x}{\sqrt{1+3x}-1}$.

P1.11. Zbadać, czy istnieją granice:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\pi x)}{|x|}$, (b) $\lim\limits_{x\to 2} e^{\frac{x+2}{x-2}}$, (c) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$, (d) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{1}{1-\ln x}$.

P1.12. Wyznaczyć asymptoty funkcji:

(a) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$, (b) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, (c) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$, (d) $f(x)=\sqrt{x^2-4x}$,

(e) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x}$, (f) $f(x)=\dfrac{\ln x}{2+\ln x}$, (g) $f(x)=\dfrac{3^x}{3^x-2}$, (h) $f(x)=x+\dfrac{\sin\sqrt{x}}{x}$.

P1.13. Czy można dobrać parametry $a, b\in\mathbf{R}$ tak, aby funkcja f była ciągła na $\mathbf{R}$? Obliczyć odpowiednie granice i naszkicować wykres funkcji f.

(a) $f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{dla } x<1\\ b & \text{dla } x=1\\ x^2+ax+1 & \text{dla } x>1\end{cases}$, (b) $f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{dla } |x|<1\\ \mathrm{arctg}x & \text{dla } |x|\geqslant 1\end{cases}$,

P1.14. Korzystając z twierdzenia Darboux uzasadnić, że równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie na wskazanym przedziale. Przedstawić graficzną interpretację równania.

(a) $4^x=\dfrac{2}{x}$, $(0{,}5, 1)$; (b) $\ln x=1-2x$, $(0{,}5, 1)$;

(c) $3^x=-x^3$, $(-1, -0{,}5)$; (d) $2^x=4-\sqrt{x}$, $(1, 2)$.

Podobne zadania (także rozwiązane) można znaleźć w skryptach:
M.Gewert, Z.Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2018,
M.Gewert, Z.Skoczylas, Wstęp do analizy i algebry. Teoria, przykłady, zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2014.

LISTA 4
(na 3 ćwiczenia)

Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej

4.1. Korzystając z definicji zbadać, czy istnieją pochodne jednostronne oraz pochodna podanej funkcji we wskazanym punkcie. Naszkicować wykres funkcji.

(a) $y(x) = \left|x^2 - 4\right|, \quad x_0 = 2;$ (b) $f(x) = \left|\sin^3 x\right|, \quad x_0 = 0;$

(c) $g(x) = x^2 \mathrm{sgn} x, \quad x_0 = 0;$ (d) $h(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{dla} \quad x \leqslant 1 \\ (x-2)^2 & \text{dla} \quad x > 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1.$

4.2. Korzystając z wzoru na pochodną funkcji $f(x) = x^\alpha$ i reguł różniczkowania, obliczyć pochodną funkcji:

(a) $y = \sqrt{2}x^4 + 4\sqrt{x} - x\sqrt{x} + 3x^2\sqrt[3]{x},$ (b) $y = 5 \cdot \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{2}{x \cdot \sqrt{x}} + \dfrac{1}{3x \cdot \sqrt[3]{x}},$

(c) $y = \dfrac{x}{\sqrt[4]{x^3}} - \dfrac{5x^2}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{7x^2} + \dfrac{x^{-2}}{x};$ (d) $y = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{9x}} - \dfrac{8}{(2x)^2} + \sqrt[3]{\dfrac{x}{16}} + \sqrt[4]{2^3}.$

4.3. Korzystając z wzoru na pochodną iloczynu lub ilorazu, obliczyć pochodną funkcji:

(a) $y = e^x \cdot \cos x,$ (b) $y = x^2 \cdot \ln x,$ (c) $y = x \cdot 2^x \cdot \sin x,$ (d) $y = x^2 \cdot \mathrm{tg} x \cdot \mathrm{arctg} x,$

(e) $y = \dfrac{x^2}{x^2 + x + 2},$ (f) $y = \dfrac{2^x - 3^x}{x},$ (g) $y = \dfrac{x \ln x}{2x - 3},$ (h) $y = \dfrac{x \sin x + \cos x}{\sin x - x \cos x}.$

4.4. Obliczyć pochodną funkcji:

(a) $y = \ln(2x),$ (b) $y = \dfrac{1}{(2x-3)^2},$ (c) $y = 3x \sin\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right),$ (d) $y = \mathrm{arctg}\dfrac{1}{x},$

(e) $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}},$ (f) $y = \sin^2 x,$ (g) $y = \cos^3\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right),$ (h) $y = x^3 \cos^2 \pi x.$

4.5. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$. Sporządzić rysunek.

(a) $f(x) = \sin 2x, \quad x_0 = 0;$ (b) $f(x) = \mathrm{ctg} x, \quad x_0 = 1{,}5\pi;$ (c) $f(x) = \ln(x - 3), \quad f(x_0) = 0.$

4.6. Napisać równanie tej stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$, która ma podaną własność.

(a) $f(x) = x \cdot \ln x$, styczna jest równoległa do prostej $5x + 5y - 1 = 0$;
(b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, styczna jest prostopadła do prostej $2x - y = 0$;
(c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$, styczna jest pozioma;
(d) $f(x) = 3 - x^2$, styczna tworzy kąt $\dfrac{\pi}{3}$ z dodatnim kierunkiem osi OX.

4.7. Korzystajac z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{4{,}02}}$, (b) $\dfrac{\ln 0{,}99}{1{,}99}$, (c) $1{,}03 \cdot \sqrt[3]{8{,}03}$, (d) $\mathrm{tg}^2\, 44^\circ$.

4.8. W wyniku pomiaru długości krawędzi czworościanu foremnego otrzymano $1{,}00 \pm 0{,}01$ m. Z jakim błędem bezwzględnym i względnym zostaną obliczone: wysokość, pole powierzchni i objętość tego czworościanu?

4.9. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)}{\ln x}$, (b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln(1+2^x)}{3^x}$, (c) $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{1}{x} - \mathrm{ctg}x\right)$,

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x} - \ln x\right)$, (e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x$, (f) $\lim\limits_{x\to \pi^-} (\pi - x)\cdot \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$.

4.10. Wyznaczyć wszystkie asymptoty funkcji:

(a) $f(x) = \dfrac{x - \mathrm{arctg}x}{x^2}$, (b) $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$, (c) $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{arctg}x}$, (d) $f(x) = \ln\left(x^2 - 4\right)$.

4.11. Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji. Naszkicować ich wykresy.

(a) $y(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} - x^2$, (b) $y(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$, (c) $f(x) = x^3 \cdot e^{6x}$, (d) $g(x) = \sqrt{x}\cdot \ln x$.

4.12. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji na wskazanym przedziale:

(a) $f(x) = x - 2\sqrt{x}$, $[0,5]$, (b) $f(x) = \mathrm{arctg}x - \dfrac{x}{2}$, $[0,2]$, (c) $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$, $\left[0, \dfrac{3}{2}\pi\right]$.

4.13.

(a) Wyznaczyć dwie liczby dodatnie, których suma jest równa 20, a iloczyn kwadratu pierwszej i trzeciej potęgi drugiej ma wartość największą.

(b) Zbadać, który z prostopadłościanów o podstawie kwadratowej i danym polu powierzchni całkowitej ma największą objętość.

(c) Firma spedycyjna przyjmuje zlecenie przewozu prostopadłościennych paczek, dla których suma wysokości i obwodu podstawy jest nie większa niż 108 cm. Znaleźć wymiary paczki o kwadratowej podstawie i największej objętości, która może być przesłana za pośrednictwem tej firmy.

(d) Przez punkt $P = (1,3)$ poprowadzić prostą tak, aby wraz z dodatnimi półosiami układu współrzędnych tworzyła trójkąt o najmniejszym polu.

4.14. Wyznaczyć zbiór wartości funkcji:

(a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$, (b) $g(x) = (x+1)\cdot e^{-2x}$, (c) $h(x) = x\cdot \ln^2 x$, (d) $h(x) = \sin x - \sin^2 x$.

Podobne zadania (z rozwiązaniami lub odpowiedziami) można znaleźć w skrypcie:
M.Gewert, Z.Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2018, rozdział 4, 5.

LISTA 5.
(na 4 ćwiczenia)

Całka nieoznaczona i oznaczona

5.1. Korzystając z definicji i wzorów na pochodne podstawowych funkcji odgadnąć funkcje pierwotne F funkcji f:

(a) $f(x) = 2x - 1$, (b) $f(x) = \dfrac{3}{1+x^2}$, (c) $f(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$, (d) $f(x) = e^{-4x}$.

5.2. Obliczyć całki:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^4 - x^3 + x - 1}{x-1}\,dx$, (b) $\displaystyle\int \left(\frac{x-2}{x}\right)^2 dx$, (c) $\displaystyle\int \left(\sqrt{x}+1\right)\left(x - \sqrt{x} + 1\right) dx$,

(d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\,dx$, (e) $\displaystyle\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x}\,dx$, (f) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}\,dx$,

(g) $\displaystyle\int \mathrm{ctg}^2 x\,dx$, (h) $\displaystyle\int \sin x \cdot \cos x\,dx$, (i) $\displaystyle\int \left(4\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 6\cos 3x + 1\right) dx$.

5.3. Obliczyć całki stosując odpowiednie podstawienie

(a) $\displaystyle\int x\sqrt{1+2x^2}\,dx$, (b) $\displaystyle\int \frac{4x}{\sqrt[3]{x^2-4}}\,dx$, (c) $\displaystyle\int x^2\left(x^3-2\right)^5 dx$, (d) $\displaystyle\int \sin x \cdot \cos^2 x\,dx$,

(e) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$, (f) $\displaystyle\int xe^{-x^2}\,dx$, (g) $\displaystyle\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x\,dx$, (h) $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2+4x+5}\,dx$.

5.4. Obliczyć całki, korzystając z tego, że $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{3x+2}\,dx$, (b) $\displaystyle\int \frac{x}{1+2x^2}\,dx$, (c) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$, (d) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$.

5.5. Obliczyć całki, stosując wzór na całkowanie przez części

(a) $\displaystyle\int xe^{-3x}\,dx$, (b) $\displaystyle\int x\cos\frac{x}{2}\,dx$, (c) $\displaystyle\int x^2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) dx$, (d) $\displaystyle\int \ln(x+1)\,dx$,

(e) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln x\,dx$, (f) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$, (g) $\displaystyle\int \mathrm{arcctg} x\,dx$, (h) $\displaystyle\int e^{-x}\sin 2x\,dx$.

5.6. Zapisać sumę całkową dla podanej całki oznaczonej. Zastosować równomierny podział przedziału całkowania. Wykorzystać wartości funkcji podcałkowej w prawych końcach podprzedziałów. Korzystając z definicji obliczyć całki z przykładów (a), (b).

(a) $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$, (b) $\displaystyle\int_1^2 x\,dx$, (c) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,dx$, (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$.

5.7. Obliczyć całkę oznaczoną. Podać jej interpretację geometryczną, wykonując odpowiedni rysunek.

(a) $\int\limits_0^1 (1+x)\,dx$, (b) $\int\limits_0^{\pi} \sin 2x\,dx$, (c) $\int\limits_{-1}^{1} e^{-x}\,dx$, (d) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{ctg}x\,dx$, (e) $\int\limits_{e^{-2}}^{e^2} \ln x\,dx$.

5.8. Wyznaczyć średnią wartość funkcji f na przedziale $[a,b]$. Wykonać rysunek.

(a) $f(x)=\sin^2 x,\ [a,b]=[0,\pi]$; (b) $f(x)=|x-2|\,,\ [a,b]=[0,3]$.

5.9. Obliczyć pole figury ograniczonej podanymi krzywymi. Wykonać rysunek.

(a) $y=x^2-2x+3,\ y=x+3$; (b) $y=\dfrac{4}{x^2+2},\ y=1$;

(c) $y=x^2,\ y=\dfrac{x^2}{2},\ y=3x$; (d) $y=-\ln(x+2)\,,\ x=0,\ y=0$.

5.10. Napisać wzór na długość łuku wykresu funkcji różniczkowalnej i obliczyć długości podanych krzywych. Naszkicować je.

(a) $y=-x\sqrt{x},\ x\in\left[0,\dfrac{4}{9}\right]$; (b) $y=\sqrt{4-x^2},\ x\in[-1,1]$;

(c) $y=\ln\sin x,\ x\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$; (d) $y=\ln x,\ x\in[1,e]$.

5.11. Napisać wzór na objętość bryły obrotowej powstającej przez obrót wokół osi OX obszaru ograniczonego wykresem ciągłej funkcji nieujemnej $y=f(x)$, osią OX i prostymi $x=a, x=b$. Korzystając z tego wzoru obliczyć objętość:

(a) kuli o promienu R,

(b) stożka ściętego o promieniach podstaw r, R i wysokości H,

(c) bryły powstającej przez obrót wokół osi OX obszaru

$$T=\left\{(x,y)\in R^2 : 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4},\ 0\leqslant y\leqslant \mathrm{tg}x\right\},$$

(d) bryły powstającej przez obrót wokół osi OX obszaru

$$T=\left\{(x,y)\in R^2 : -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant y\leqslant \cos^2 x\right\}.$$

5.12. Obliczyć całki funkcji wymiernych

(a) $\displaystyle\int \frac{8x^2}{x^2-1}\,dx$, (b) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^3+x^2-4x-4}\,dx$, (c) $\displaystyle\int \frac{x^3-x^2+3}{x^4+3x^2}\,dx$,

(d) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2+6x+18}\,dx$, (e) $\displaystyle\int \frac{5-4x}{x^2-4x+20}\,dx$, (f) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+1}{x^3+2x^2+2x}\,dx$.

5.13. Obliczyć całki funkcji trygonometrycznych

(a) $\int \sin^5 x \, dx$, (b) $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$, (c) $\int \frac{\cos^3 x}{2 - \sin x} \, dx$, (d) $\int \frac{1}{4 + 5\sin^2 x} \, dx$,

(e) $\int \frac{1}{5 - 3\cos x} \, dx$, (e) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin 3x \, dx$, (f) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \cos 4x \, dx$, (g) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx$.

Podobne zadania (z rozwiązaniami lub odpowiedziami) można znaleźć w skrypcie:
M.Gewert, Z.Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2018, rozdział 6, 7, 8.

POWTÓRKA 2

P2.1. Obliczyć pochodne funkcji:

(a) $f(x) = \dfrac{\text{arctg}x}{\ln(1+x^2)}$, (b) $f(x) = e^{3\sin x} \cdot \sin 2x$, (c) $f(x) = (x\cos x)^2$, (d) $f(x) = \dfrac{x \cdot \sqrt[3]{2+x}}{x + \sqrt[3]{2+x}}$.

P2.2.

(a) Napisać równania stycznych do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{2}\text{arctg}\,(1-x^2)$ w miejscach zerowych funkcji. Pod jakimi kątami wykres przecina oś OX?

(b) Napisać równanie tej stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \ln\sqrt{x} - 0{,}5x^2$, która jest równoległa do osi OX.

(c) Napisać równanie tej stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \ln\left(x^2 + e^{-x}\right)$, która jest równoległa do prostej $l : y = 5 - x$.

(d) Napisać równanie tej stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \text{tg}(2x) - 3x$, $\quad x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, która jest prostopadła do prostej $l : x + 5y = 0$.

(e) Dla jakich wartości parametrów a, b parabola o równaniu $y = -x^2 + ax + b$ jest styczna w punkcie $(1,1)$ do prostej $y = x$? Wykonać rysunek.

P2.3. Wykorzystując różniczkę obliczyć, o ile w przybliżeniu zmieni się wartość funkcji

(a) $f(x) = (1+x)\ln x$, gdy jej argument wzrośnie od wartości $x_0 = 1$ do wartości $x_1 = 1{,}1$;

(b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$, gdy jej argument zmieni się od wartości $x_0 = 4$ do wartości $x_1 = 3{,}99$.

P2.4. Zbadać istnienie asymptoty

(a) o równaniu $x = 0$ funkcji $f(x) = \dfrac{1-\cos 3x}{\sin^2 4x}$,

(b) o równaniu $x = \dfrac{\pi}{2}$ funkcji $f(x) = \dfrac{\ln(1+3\cos x)}{\pi - 2x}$,

(c) poziomej w $+\infty$ funkcji $f(x) = x \cdot \left(6^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x}}\right)$,

(d) o równaniu $x = 0$ funkcji $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin 2x}$.

P2.5. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji na wskazanym przedziale.

(a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$, $\quad [-7, 0]$; (b) $y(x) = \dfrac{e^x}{1+x^2}$, $\quad [-2, 2]$;

(c) $g(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin x$, $\quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; (d) $y(x) = \sqrt[3]{(x^2+x)^2}$, $\quad [-2, 3]$.

P2.6. Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji f. Naszkicować jej wykres.

(a) $f(x) = \ln\left(x^3 - 2x^2 + x\right)$, (b) $f(x) = x \cdot \ln^4 x$, (c) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^x - 1}$, (d) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

P2.7. Wyznaczyć zbiór wartości funkcji. Naszkicować jej wykres.

(a) $y(x) = \dfrac{(x-1)^2}{(x-3)^2}$, (b) $f(x) = x \cdot (1 + 2\ln x)$, (c) $f(x) = x \cdot \sqrt{4x - x^2}$, (d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

P2.8.
(a) W obszar ograniczony parabolą $y = 16 - x^2$ i osią OX wpisano prostokąt tak, że jeden z jego boków leży na osi OX. Jakie wymiary ma prostokąt o największym polu?

(b) Metodami rachunku różniczkowego uzasadnić, że prostopadłościan o danej sumie długości krawędzi, kwadratowej podstawie i największej objętości jest sześcianem.

(c) Ile materiału stracimy wycinając z blachy w kształcie półkola o promieniu R prostokąt o największym polu?

P2.9. Obliczyć całki:

(a) $\displaystyle\int x \cdot \cos(\pi x + 2)\, dx$, (b) $\displaystyle\int \left(\frac{x}{e^x}\right)^2 dx$, (c) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}\, dx$,

(d) $\displaystyle\int \frac{\sin 3x}{e^x}\, dx$, (e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{tg}(\ln x)}{x}\, dx$, (f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x^2+1} + \sqrt{x^2+1}}{x^2+1}\, x dx$,

(g) $\displaystyle\int \frac{1+\ln x}{1+\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x} dx$, (h) $\displaystyle\int (1 + \cos x) \cdot \sin^3 x\, dx$, (i) $\displaystyle\int 3^{2x} \cdot \sin 3^x\, dx$.

P2.10. Obliczyć całkę oznaczoną. Podać jej interpretację geometryczną. Wykonać rysunek.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{2x}\, dx$, (b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x \cos x\, dx$, (c) $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e^2} \ln x\, dx$, (d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{tg} x\, dx$.

P2.11. Obliczyć pole figury ograniczonej podanymi krzywymi. Wykonać rysunek.

(a) $y = x^2 - 2x,\ y = x + 4$; (b) $y = x^2,\ y = 5 - (x+1)^2$;

(c) $y = \sqrt{x},\ y = \sqrt[3]{x}$; (d) $y = \dfrac{4}{x^2+1},\ y = 1$;

(e) $x + y = 4,\ y = \dfrac{3}{x}$; (f) $y = \sin x,\ y = x,\ x = \pi$;

(g) $y = \ln(1+x),\ y = x,\ x = e$; (h) $y = \ln(1+x),\ y = x,\ y = 1$.

Podobne zadania (także rozwiązane) można znaleźć w skryptach:
M.Gewert, Z.Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2018,
M.Gewert, Z.Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Kolokwia i egzaminy, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2018.

LISTA 6.
(dodatkowa)

6.1. Wyznaczyć przedziały wypukłości i punkty przegięcia wykresu funkcji

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, (b) $f(x) = e^{\operatorname{arctg} x}$, (c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, (d) $f(x) = \sin x + 0{,}125 \sin 2x$.

6.2. Zbadać przebieg zmienności funkcji i sporządzić ich wykresy:

(a) $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$, (b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, (c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$, (d) $f(x) = 4e^x - e^{2x}$.

6.3. Napisać wzory Taylora z drugą i trzecią resztą dla podanych funkcji i punktów. Naszkicować wykres funkcji oraz wielomianu Taylora pierwszego i drugiego rzędu.

(a) $f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 1;$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x_0 = 2.$

6.4. Oszacować dokładność przybliżeń na wskazanych przedziałach:

(a) $\ln(1+x) \approx x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}, \quad |x| \leqslant 0{,}1;$ (b) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{2}, \quad |x| \leqslant 0{,}01;$

(c) $\cos^2 x \approx 1 - x^2, \quad |x| \leqslant 0{,}1;$ (d) $e^{-2x} \approx 1 - 2x + 2x^2, \quad |x| \leqslant 0{,}25.$

6.5. Napisać wzór na objętość bryły obrotowej powstającej przez obrót wokół osi OY obszaru ograniczonego wykresem funkcji $y = f(x)$, nieujemnej i ciągłej na przedziale $[a, b]$, $a \geqslant 0$, osią OX i prostymi $x = a$, $x = b$. Korzystając z tego wzoru obliczyć objętość:

(a) kuli o promieniu R,
(b) stożka ściętego o promieniach podstaw r, R i wysokości H,
(c) bryły powstającej przez obrót wokół osi OY obszaru

$$T = \left\{(x, y) \in R^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant \operatorname{arcctg} x\right\},$$

(d) bryły powstającej przez obrót wokół osi Oy obszaru

$$T = \left\{(x, y) \in R^2 : 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant y \leqslant \cos^2 x\right\}.$$

6.6. Napisać wzór na pole powierzchni powstałej przez obrót wokół osi OX wykresu funkcji $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, $a \geqslant 0$, (nieujemnej i mającej ciągłą pochodną na tym przedziale). Korzystając z tego wzoru obliczyć pole powierzchni powstałej przez obrót wokół osi OX wykresu funkcji:

(a) $y = \sqrt{r^2 - x^2},\ x \in \left[0, \dfrac{r}{2}\right]$; (b) $y = \dfrac{x^3}{3},,\ x \in [1, 2]$; (c) $y = 2\sqrt{x+1},\ x \in [2, 7]$.

Podobne zadania (także rozwiązane) można znaleźć w skryptach:
M.Gewert, Z.Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2018,
M.Gewert, Z.Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Kolokwia i egzaminy, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2018.

Jolanta Sulkowska