Konsultacje: później ustalone, bdyda@pwr.edu.pl

skrypty Gewert-Skoczylas Wstęp do analizy i algebry; AM 1

Zdania w logice

... to jest zdanie, któremu można przyporządkować wartość logiczną: prawda (1) lub fałsz (0)

np. $4 > 3$

$10 < 5$

ale nie:

$$\left.\begin{array}{l} a^2+b^2=c^2 \\ \Delta = b^2-4ac \end{array}\right\} \text{ nie są zdania w logice}$$

Spójniki:

- koniunkcja ('oraz'): jeśli p, q są zdaniami w logice, to jest również zdanie „p oraz q", zapisywane też: $p \wedge q$

Jeśli oba zdania p, q są prawdziwe, to $p \wedge q$ jest prawdziwe, w przeciwnym razie $p \wedge q$ jest fałszywe.

• alternatywa

p, q - zdania w logice $\longrightarrow$ „p lub q" też jest zdaniem w logice.

Jeśli obe zdania p, q są fałszywe, to (p lub q) jest fałszywe, w przeciwnym razie (p lub q) jest prawdziwe

Ozn. „p lub q" oznaczamy $p \vee q$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

• zaprzeczenie zdania:

p – zdanie w logice $\longrightarrow$ „nie p" (ozn. $\neg p$, $\sim p$) też jest zdaniem w logice

p	$\neg p$
0	1
1	0

Np.:

„$7 > 5$ lub $7 > 10$" prawda

„$7 > 5$ oraz $7 > 10$" fałszywe

$\neg(7 > 5)$ fałszywe

$\neg(7 > 10)$ prawdziwe

• implikacja

p, q – zdania w logice ⟶ „jeśli p, to q" (ozn. $p \Rightarrow q$)
„z p wynika q"

też jest zdaniem w logice

p	q	$p \Rightarrow q$	
0	0	1	← bywa kłopotliwy ← nie wykonał zadania, nie otrzymał podwyżki ✓
0	1	1	← nie wykonał zadania, ale otrzymał podwyżkę ✓
1	0	0	← wykonał zadanie, nie otrzymał podwyżki ✗
1	1	1	← wykonał zadanie, otrzymał podwyżkę ✓

$p \Rightarrow q$

poprzednik (p), następnik (q)

Jeśli $\underbrace{5>7}_{\text{fałszywe}}$, to $3<2$. – prawda

Jeśli $5>7$, to $5>3$. – prawda

p = „pracownik wykona pewne zadanie"

q = „pracownik otrzyma podwyżkę"

szef obiecał pracownikowi, że

$p \Rightarrow q$

prawa logiczne

$$\left.\begin{array}{l} \neg(p\wedge q) \iff (\neg p)\vee(\neg q) \\ \neg(p\vee q) \iff (\neg p)\wedge(\neg q) \end{array}\right\}\ \text{prawa de Morgana}$$

$$\neg(p\Rightarrow q) \iff p\wedge(\neg q)$$

$$\left.\begin{array}{l} p\wedge(q\vee r) \iff (p\wedge q)\vee(p\wedge r) \\ p\vee(q\wedge r) \iff (p\vee q)\wedge(p\vee r) \end{array}\right\}\ \text{8 przypadków}$$

Dod prawa de Morgana

(*) $\neg(p \vee q) \Longleftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

lewa strona (*)

prawa strona (*)

Funkcja zdaniowa

X — niepusty zbiór

$p(x)$ jest funkcją zdaniową zmiennej $x \in X$, jeśli dla dowolnego $x \in X$, $p(x)$ jest zdaniem w logice

Np. $X = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

„$x \geq 5$" — funkcja zdaniowa zmiennej $x \in \mathbb{N}$

np.

$$\left.\begin{array}{l} 1 \geq 5 \\ 2 \geq 5 \\ 3 \geq 5 \\ 4 \geq 5 \end{array}\right\} \text{fałszywe}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5 \geq 5 \\ 6 \geq 5 \\ \vdots \end{array}\right\} \text{prawdziwe}$$

Kwantyfikatory

„duży" — „dla każdego", oznaczenie: $\bigwedge$ $\forall$ („for all")

„mały" — „istnieje", oznaczenie: $\bigvee$ $\exists$ („exists")

np. $\forall_{x\in\mathbb{R}} \underbrace{(x \geq 0)}_{\text{funkcja zdaniowa zmiennej } x\in\mathbb{R}} \longrightarrow$ zdanie w logice (fałszywe)

$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}}$

$\forall_{x\in\mathbb{R}}$

zał. Jeśli $p(x)$ jest funkcją zdaniową zmiennej $x \in X$, to

$\left.\begin{array}{l} \forall_{x\in X}\ p(x) \\ \exists_{x\in X}\ p(x) \end{array}\right\}$ są zdaniami w logice, $\forall_{x\in X}\ p(x)$ jest prawdą, gdy dla każdego $x\in X$ prawdą jest, że $p(x)$ (i jest fałszem w przeciwnym razie)

$\exists_{x \in X}\ p(x)$ jest prawdą, gdy $p(x)$ dla pewnego $x \in X$,

i fałszem, gdy $\neg p(x)$ dla dowolnego $x \in X$.

np.

zdania w logice

$$\exists_{x \in \mathbb{R}} \boxed{(x^2 \geq -1)}$$ — prawdziwe np. dla $x=0$

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \boxed{(x^2 \geq -1)}$$ — prawdziwe, bo dla $x \geq 0$: $x^2 \geq 0 \geq -1$, a dla $x<0$ $x^2 > 0 \geq -1$.

$$\exists_{x \in \mathbb{R}} \boxed{(x^2 \leq 1)}$$ — prawda, np. dla $x=0$

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \boxed{(x^2 \leq 1)}$$ — fałsz, np. dla $x=-2$

funkcje zdaniowe zmiennej $x \in \mathbb{R}$

P[illegible]:

$$\neg\left(\forall x \; p(x)\right) \Longleftrightarrow \exists x \left(\neg p(x)\right)$$

$$\neg\left(\exists x \; p(x)\right) \Longleftrightarrow \forall x \left(\neg p(x)\right)$$

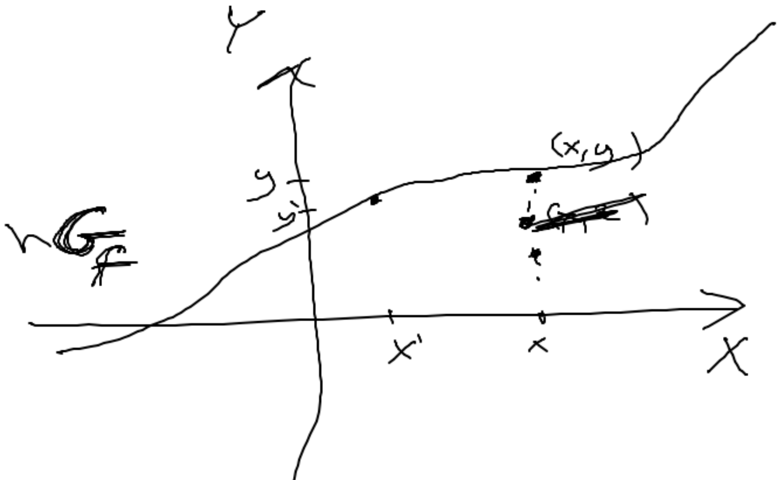
$$\forall_{x \in X} \, p(x) \Longrightarrow \exists_{x \in X} \, p(x) \qquad (\circ \text{ ie } X \neq \phi)$$

Funkcje

X, Y – dwa zbiory

$$X \times Y = \{(x,y) : x \in X, \ y \in Y\}$$

Funkcja $f : \underset{\text{dziedzina } f}{X} \to \underset{\text{przeciwdziedzina } f}{Y}$ to jest pewien podzbiór G_f zbioru $X \times Y$, taki że



np. dla $X=Y=\mathbb{R}$

1) $\forall_{x\in X} \ \exists_{y \in Y} \ (x,y) \in G_f$

2) $\forall_{x \in X} \ \forall_{y\in Y} \ \forall_{z \in Y} \ \big((x,y)\in G_f \wedge (x,z) \in G_f \Rightarrow y = z \big)$

czyli krócej: dla dow. $x \in X$ istnieje <u>dokładnie jeden</u> $y \in Y$

taki, że ~~G_f~~ $(x,y) \in G_f$

Ten y taki, że $(x,y) \in G_f$ oznaczamy przez $f(x)$.

Zbiór wartości funkcji

Jeśli $f: X \to Y$, to zbiorem wartości f nazywamy zbiór

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\}$$

Np.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2$$

dziedzina   przeciwdziedzina

$$f(\mathbb{R}) = \{x^2 : x \in \mathbb{R}\} = [0, \infty)$$ — zbiór wartości

$$g: \mathbb{R} \to [0, \infty), \quad g(x) = x^2$$

$$g(\mathbb{R}) = [0, \infty)$$ — zb. wartości

Analogia z językami programowania: (np. C++)

```
unsigned f(unsigned x)
{   return x*x;
}
```

dziedzina

przeciwdziedzina

zbiór wartości: pewien podzbiór przeciwdziedziny

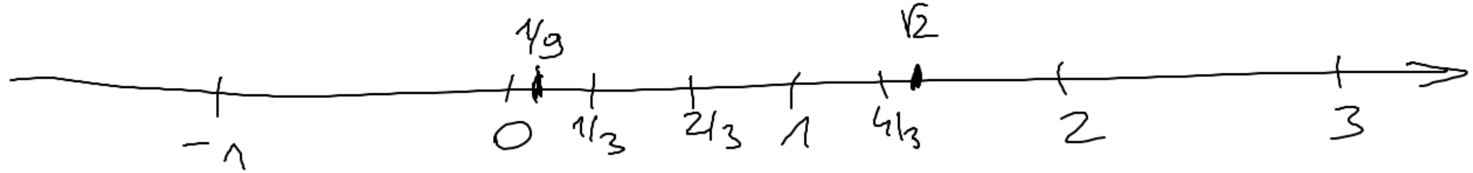
Zbiory liczbowe:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ zb. l. naturalnych

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, \dots\}$ zb. l. całkowitych

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$

$\mathbb{R}$ = zb. liczb rzeczywistych



przedziały:

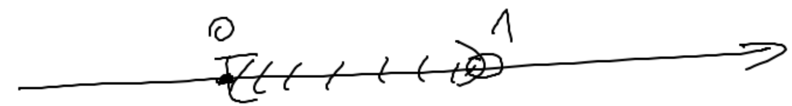
(a,b) otwarty

$[a,b) = \langle a,b)$

$(a,b] = (a,b\rangle$

$\langle a,b\rangle = [a,b]$ domknięty

np. $x \in [a,b) \iff a \le x < b$



Def.

Funkcja parzysta:

mówimy, że $f: D \to \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}$, jest parzysta / nieparzysta

jeśli 1) $\forall_{x \in D} \, (-x \in D)$ } dziedzina jest symetryczna wzgl. 0

oraz 2) $\forall_{x \in D} \, (f(x) = f(-x))$ | 2) $\forall_{x \in D} \, (f(x) = -f(-x))$

Np. $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

jest parzysta, bo $[-1,1]$ jest sym. wzgl. 0

oraz $\forall_{x \in [-1,1]}$

$$f(x) = x^2$$

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2$$

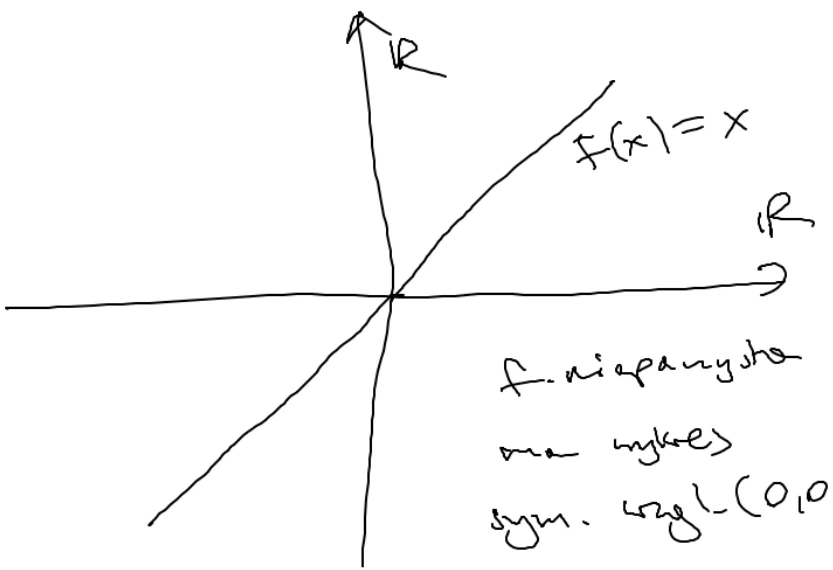
Np. $f(x) = x$ jest f. nieparzysta $(f: \mathbb{R} \to \mathbb{R})$

$$f(x) = x$$

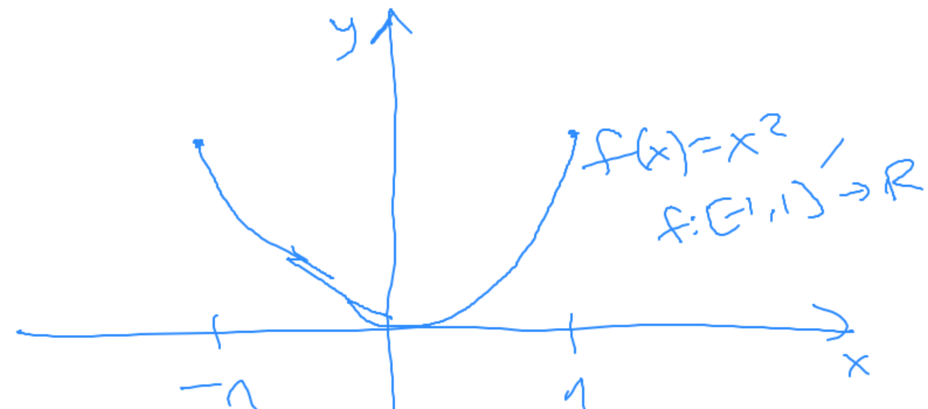
$$\underline{f(-x)} = -x = -\underline{f(x)}$$

$$-f(-x) = -(-x) = x = f(x)$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$



f. nieparzysta ma wykres sym. wzgl. (0,0)



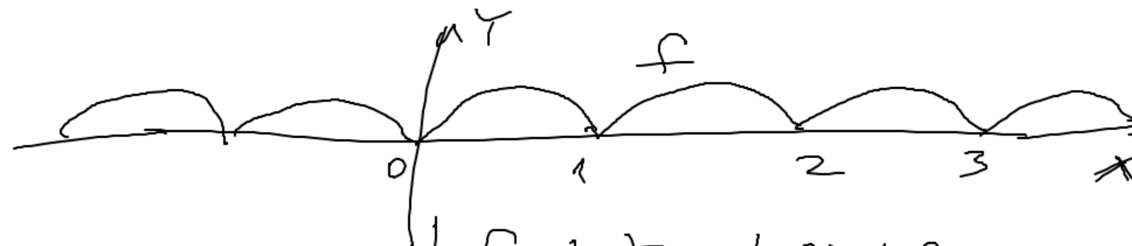
f. parzysta ma wykres sym. względem osi Y

Def

Mówimy, że $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest okresowa z okresem $T>0$, jeśli

$$\forall_{x\in\mathbb{R}}\quad f(x+T)=f(x)$$

Mówimy, że $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest okresowa, jeśli istnieje $T>0$ takie, że f jest okresowa z okresem $T>0$.



f jest okresowa z okresem $1, 2, 3, 4, \ldots$

Jeśli istnieje najmniejsze $T>0$ dla którego $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest okresowa, to takie T nazywamy okresem podstawowym f.

Np. $f(x)=0$ dla $x\in\mathbb{R}$ jest okresowa z okresem $T>0$ dla dowolnego $T>0$.

(okresu podstawowego nie ma)

Funkcje monotoniczne

Niech $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$.

Mówimy, że f jest:

- <u>rosnąca</u>, jeśli $\forall x_1, x_2 \in D \ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$
- <u>malejąca</u>, jeśli $\forall x_1, x_2 \in D \ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$
- <u>słabo rosnąca</u> (niemalejąca), jeśli $\forall x_1, x_2 \in D \ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$
- <u>słabo malejąca</u> (nierosnąca), jeśli $\forall x_1, x_2 \in D \ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$.

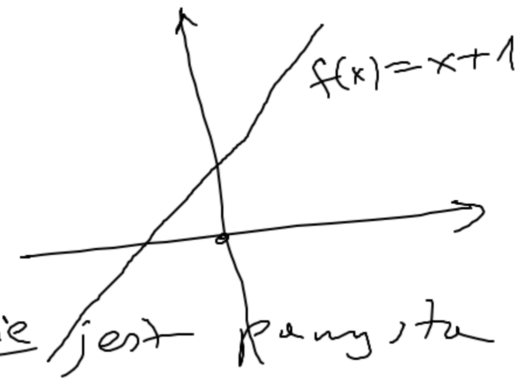
Jeśli zachodzi któryś z powyższych warunków, to mówimy, że f jest <u>monotoniczna</u>.

Uwaga

Są funkcje, które nie są ani parzyste, ani nieparzyste.

np. $f(x) = x+1$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$f(-1) = 0$

$f(1) = 2$

$0 \neq 2$, więc f <u>nie</u> jest parzysta

$0 \neq -2$, więc f <u>nie</u> jest nieparzysta

Np.: $f(x) = 2x+1$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest rosnąca.

$$\Updownarrow$$

$$\forall_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$$

D-d.

Weźmy dowolne $x_1 \in \mathbb{R}$ i dowolne $x_2 \in \mathbb{R}$.

Załóżmy, że $x_1 < x_2$

Chcemy pokazać: $f(x_1) < f(x_2)$.

przekształcamy równoważnie:

$$2x_1 + 1 < 2x_2 + 1 \quad | -1$$

$$2x_1 < 2x_2 \quad | :2$$

$$x_1 < x_2$$

$$x_1 < x_2 \quad | \cdot 2$$

$$2x_1 < 2x_2 \quad | +1$$

$$2x_1 + 1 < 2x_2 + 1$$

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Zatem f - rosnąca.

$\boxtimes$