Mówimy, że $f: D \to \mathbb{R}$ jest

(słabo malejąca)

- malejąca na zbiorze $E \subset D$, jeśli

$$\forall_{x_1 \in E} \forall_{x_2 \in E} \left(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \right)$$

$\geqslant$

(słabo rosnąca)

- rosnąca na zbiorze $E \subset D$, jeśli

$$\forall_{x_1 \in E} \forall_{x_2 \in E} \left(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \right)$$

$\leqslant$

Przykład

Sprawdźmy, że funkcja $f(x)=x^2$ jest malejąca na $(-\infty;0)$.

Weźmy dowolne $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ i załóżmy, że $x_1 < x_2$.

Wówczas:

$$x_1 < x_2 \quad \Big| \cdot x_1 \quad (x_1 < 0)$$

$$\underbrace{x_1^2 > x_1 x_2}$$

a także

$$x_1 < x_2 \quad \Big| \cdot x_2 \quad (x_2 < 0)$$

$$\underbrace{x_1 x_2 > x_2^2}$$

Stąd $\underset{f(x_1)}{\underset{\parallel}{x_1^2}} > x_1 x_2 > \underset{f(x_2)}{\underset{\parallel}{x_2^2}}$, a więc pokazaliśmy, że $f(x_1) > f(x_2)$.

$\boxtimes$

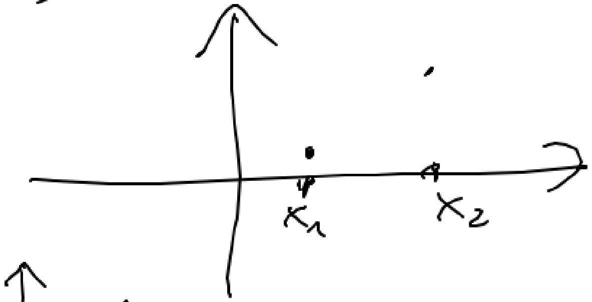
Def.

Jeśli $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, to mówimy, że f jest **różnowartościowa** (w skrócie: **1-1**), jeśli

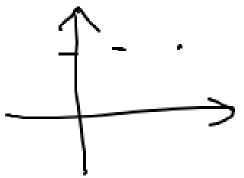
$$\forall_{x_1, x_2 \in D} \left(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \right).$$

Albo równoważnie:

$$\forall_{x_1, x_2 \in D} \left(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \right).$$



$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$



Wł. $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, \infty)$ jest $1-1$

Istotnie, jeśli $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ oraz $f(x_1) = f(x_2)$,

czyli

$$\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \quad \Big|^2$$

$$x_1 = x_2 .$$

$\boxtimes$

Złożenie funkcji

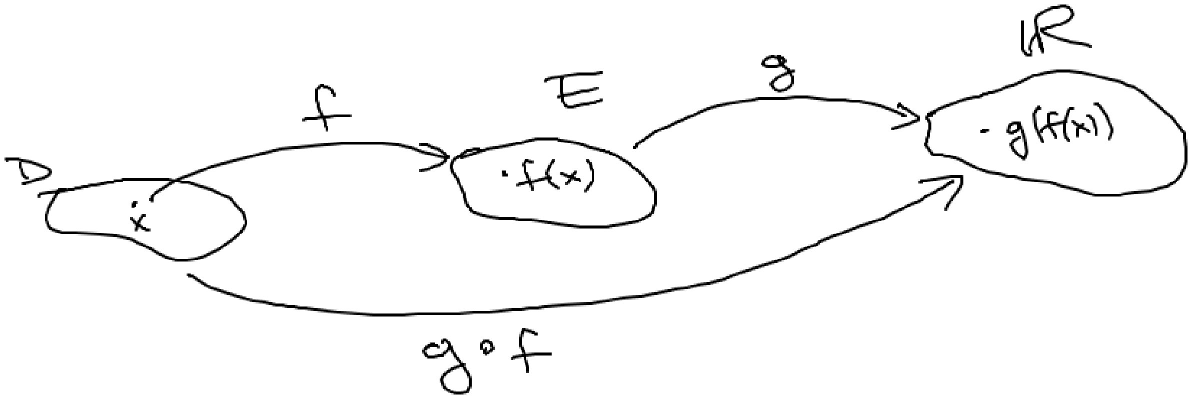
Załóżmy, że $f: D \to E$ oraz $g: E \to \mathbb{R}$.

Złożeniem funkcji g z f nazywamy funkcję

$$g \circ f : D \to \mathbb{R}$$

określoną wzorem

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in D$$



$N_{\Gamma}.$

$f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2 \qquad g(x) = x+3$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \underline{x^2+3}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+3) = (x+3)^2$

$= (g(x))^2 = (x+3)^2$

Widzimy, że (tutaj) $g \circ f \neq f \circ g$.

$(f \circ f)(x) = f(x^2) = (x^2)^2 = x^4$

$(g \circ g)(x) = g(x+3) = (x+3)+3 = x+6$

Jeśli funkcja f jest dana jakimś wzorem (bez jawnego określenia dziedziny), to przyjmujemy w domyśle, że jej dziedziną jest tzw. <u>dziedzina naturalna</u>, czyli zbiór wszystkich argumentów, dla których wzór określający f ma sens.

<u>Np.</u> . $f_1(x) = x^2$ — dziedzina naturalna: $D_{f_1} = \mathbb{R}$

. $f_2(x) = \sqrt{x}$ — — " ——— : $D_{f_2} = [0, \infty)$

. $f_3(x) = \frac{2}{(x+1)(x-2)}$ — — " ——— : $D_{f_3} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$

Pr. $f(x)=x^2$, $g(x)=\frac{1}{x-1}$

$D_f=\mathbb{R}$ $D_g=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$f(\mathbb{R})=[0,\infty)$

kłopot, bo g nie jest określona w 1

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\frac{1}{x^2-1}$ ma naturalną dziedzinę $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

Zmniejszając dziedzinę f: $\tilde{f}:=f\restriction_{\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}}:\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$\tilde{f}(x)=x^2$, $x\in\underline{\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}}$

złożenie $g\circ\tilde{f}$ ma sens.

$$g\circ\tilde{f}(x)=g(x^2)=\frac{1}{x^2-1},\quad x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$$

Funkcje odwrotne

Załóżmy, że $f : D \to E$ jest różnowartościowa i „na”.

Mówimy, że $f : D \to E$ jest surjekcją (jest „na”), jeśli

$$\underset{\{f(x)\,:\, x \in D\}}{\underset{\parallel}{f(D)}} = E.$$

Wówczas istnieje funkcja $g : E \to D$ taka, że

$$g(f(x)) = x \quad \text{dla dow.} \quad x \in D$$

oraz

$$f(g(x)) = x \quad \text{dla dow.} \quad x \in E.$$

Nazywamy ją funkcją odwrotną do f, ozn. f^{-1}.

Np.

Znajdziemy funkcję odwrotną do funkcji $f(x) = x - 4$.

$(D_f = \mathbb{R})$

$$f(x) = y = x - 4 \quad \Big| +4 \quad , x \in \mathbb{R}$$

$$y + 4 = x$$

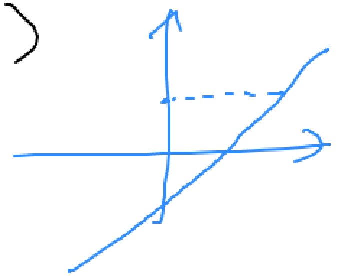
$$x = y + 4 \quad , y \in \mathbb{R}$$

$$x = f^{-1}(f(x))$$

$$x = f^{-1}(y)$$

$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R} \underset{na}{\to} \mathbb{R}$



$$f^{-1}(y) = x = y + 4$$

$$\boxed{f^{-1}(y) = y + 4} \quad , y \in \mathbb{R}$$

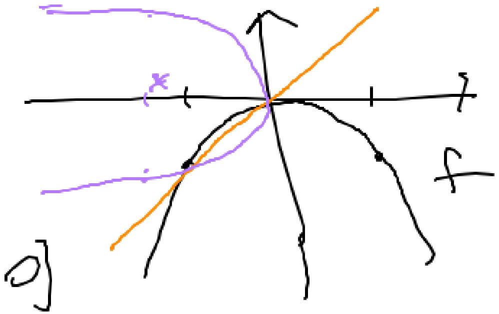
Spr.

$$f^{-1}(f(x)) = f(x) + 4 = (x-4) + 4 = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = f(x+4) = (x+4) - 4 = x$$

Np.:

$f(x) = -x^2$, $f: (-\infty, 0] \to (-\infty, 0]$



Można spr., że f jest 1-1 i na.

$y = -x^2$, $\underbrace{x \in (-\infty, 0]}$, $y \in (-\infty, 0]$

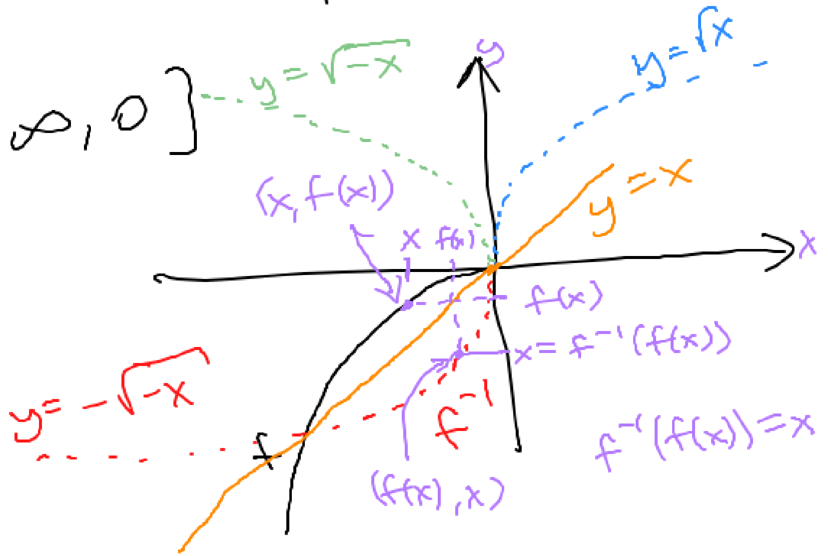
$-y = x^2 \quad | \sqrt{\ }$

$\sqrt{-y} = \sqrt{x^2} = |x| = -x$

$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

$x = -\sqrt{-y}$

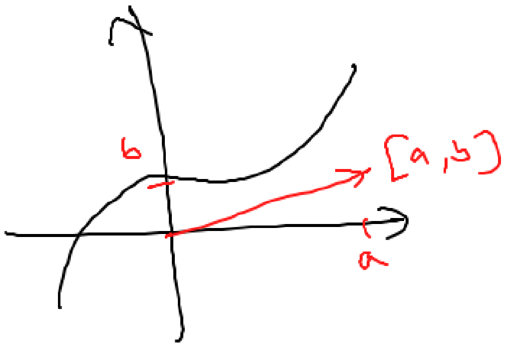
$f^{-1}(y) = -\sqrt{-y}$, $y \in (-\infty, 0]$



Wykresy f i f^{-1} są symetryczne względem prostej $y = x$.

Przekształcanie wykresów funkcji

$y = f(x)$

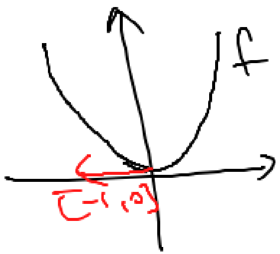


$y = f(x-a) + b$

Wykres tej funkcji powstaje z wykresem f przez przesunięcie ~~o~~ - wektor $[a,b]$.

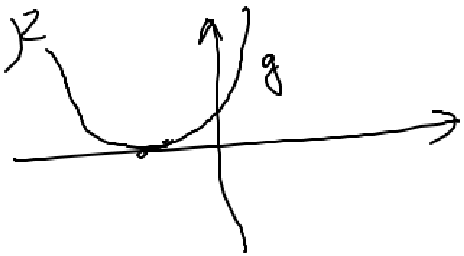
Wy.

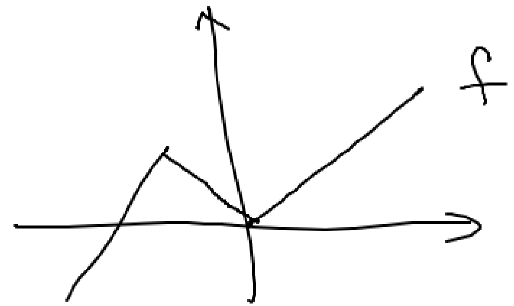
$f(x) = x^2$



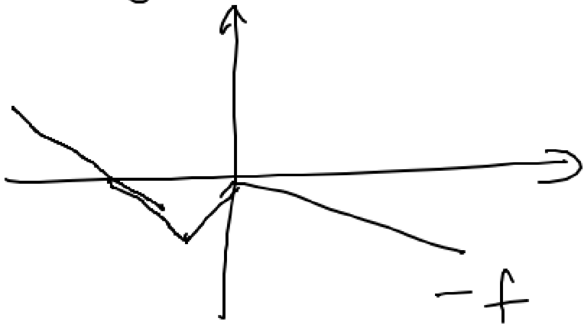
$g(x) = (x+1)^2$

$[-1,0]$



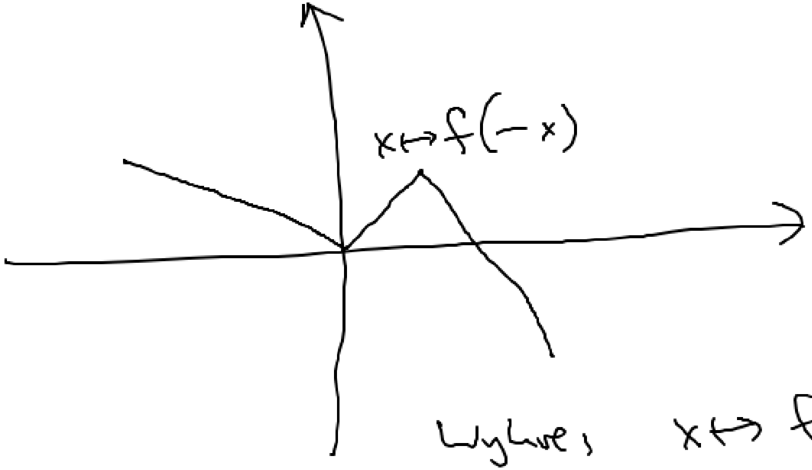


$y = -f(x)$



Wykres $-f$ powstaje przez odbicie wykresu f wzgl. Ox

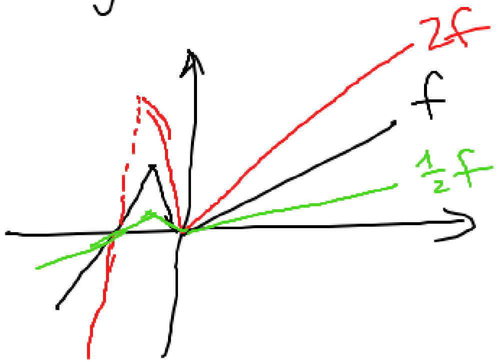
$y = f(-x)$



Wykres $x \mapsto f(-x)$ powstaje z wykresu f przez odbicie wzgl. Oy.

Skalowanie wykresów:

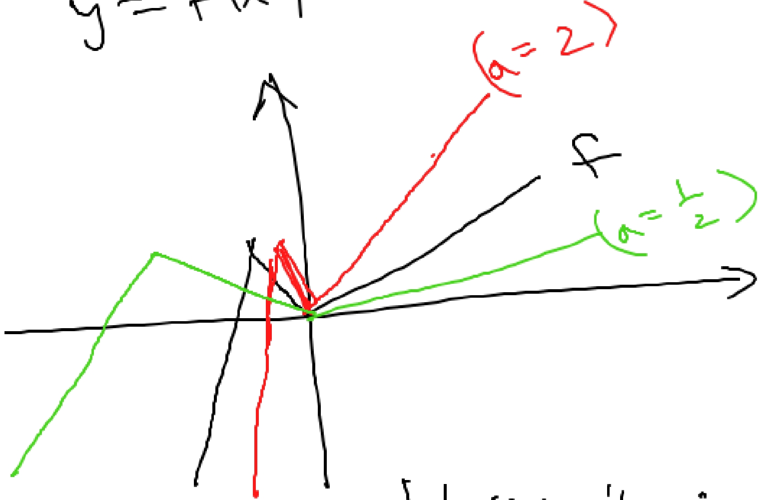
$y = f(x)$



$y = bf(x)$ $(b>0)$

Wykres $y=bf(x)$ powstaje z wykresu f przez rozciągnięcie $(b>1)$ lub skurczenie (jeśli $b<1$) wykresu f wzdłuż osi ~~pionowej Ox~~ Oy.

$y = f(x)$

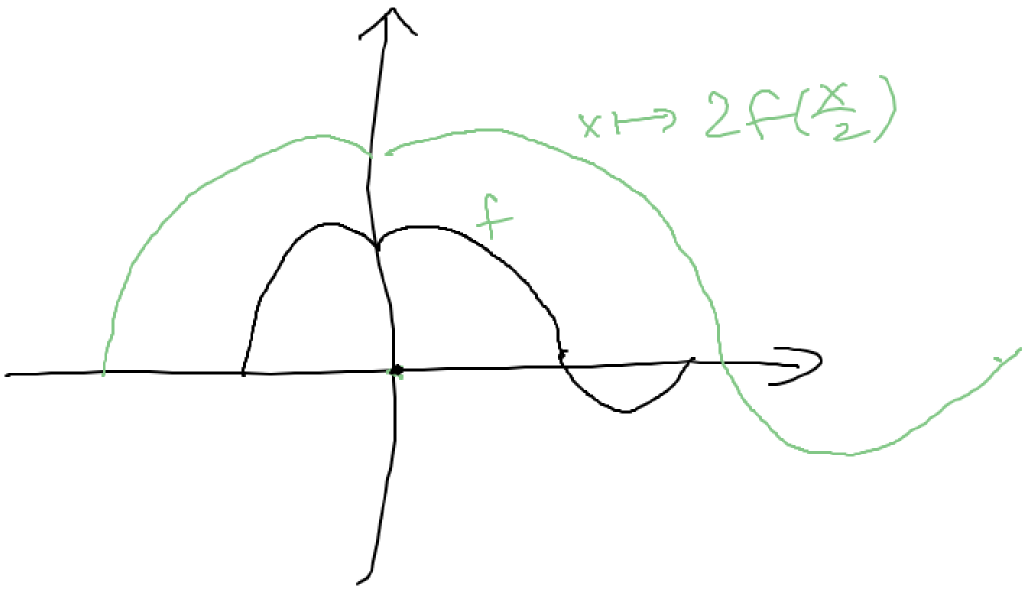


$y = f(ax)$ $(a>0)$

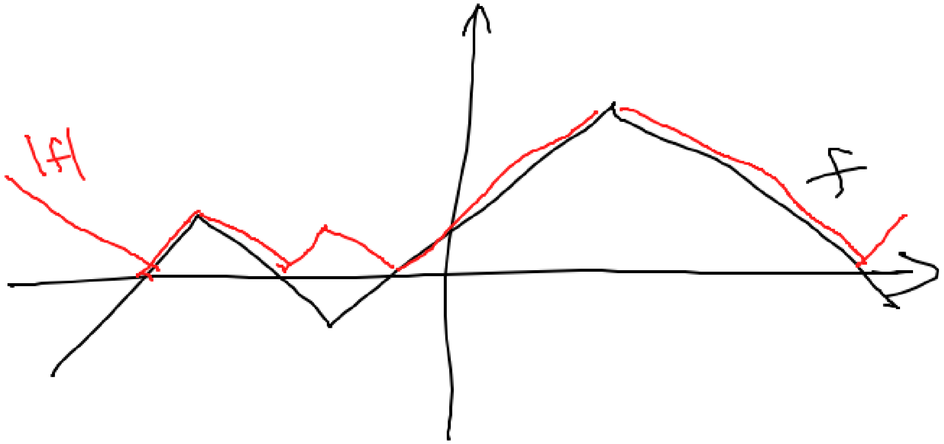
Wykres $y=f(ax)$ powstaje z wykresu f przez rozciągnięcie $(a<1)$ lub wykresu f skurczenie (jeśli $a>1$) wzdłuż osi Ox.

W szczególności: $y = bf(\frac{x}{b})$ powstaje z wykresu f przez jednokładność o środku w $(0,0)$ i skali b.

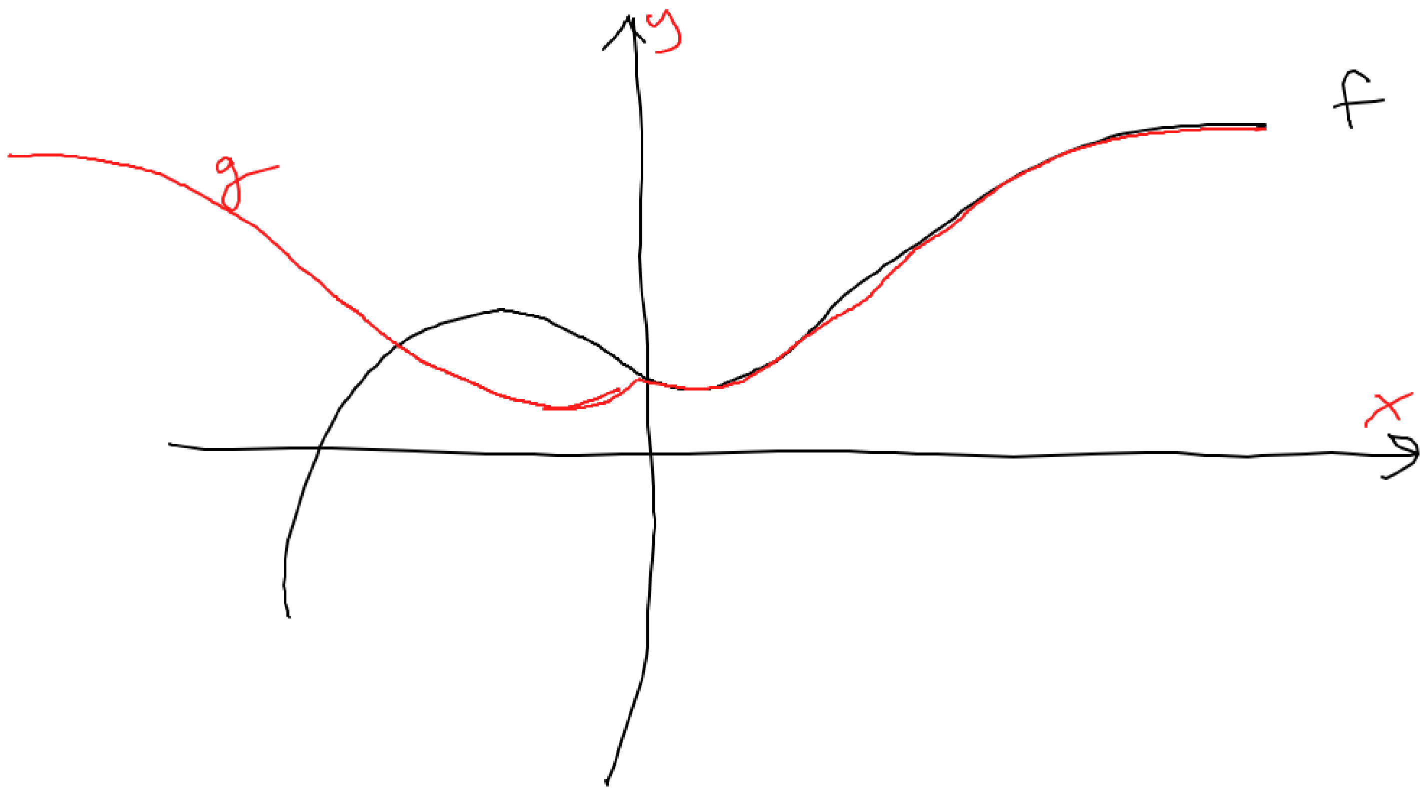
Nr.



$y = |f(x)|$



$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ f(-x), & x < 0 \end{cases}$$



$g(x) = f(|x|)$

$g(-x) = f(|-x|) =$

$= f(|x|) =$

$= g(x)$

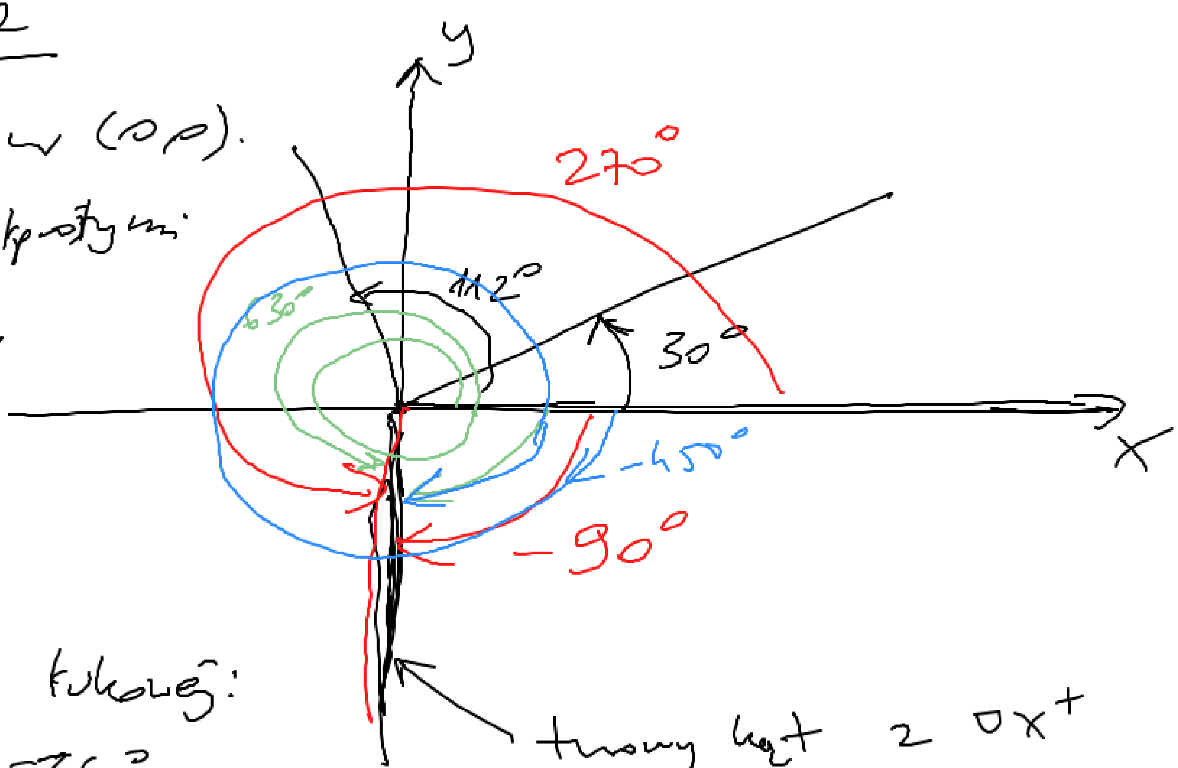
g jest f. parzystą

$\rightarrow$ g ma wykres symetryczny względem Oy

Funkcje trygonometryczne

Rozważamy półproste o końcach w $(0,0)$.

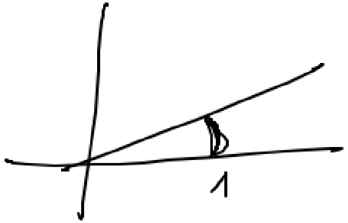
Mierzymy kąt między tymi półprostymi a półprostą $Ox^+ = \{(x,0): x \geq 0\}$, przyjmując, że kąt dodatni odpowiada obrotowi wokół $(0,0)$ przeciwnie do wskaz. zegara



tworzy kąt z Ox^+ o mierze $270°$
lub $-90°$
lub $-450°$
lub $-630°$
...

Będziemy używali miary łukowej:

$$2\pi = 360°$$

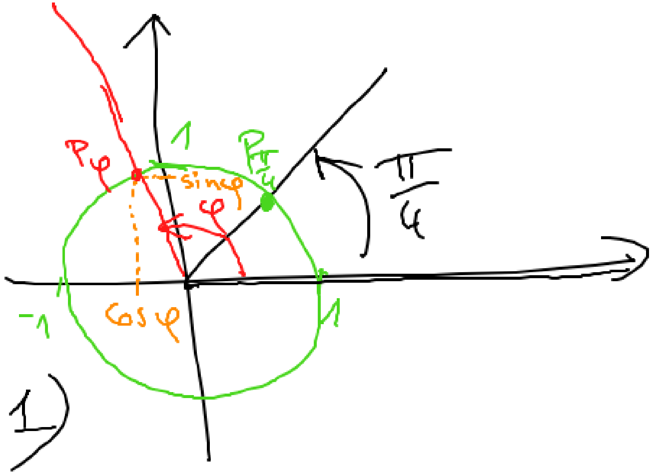


φ – kąt w mierze łukowej $\Rightarrow$ ma $\varphi \cdot \frac{360°}{2\pi}$ (stopni)

N1

stopnie	0°	30°	45°	60°	90°	135°	180°	360°
radiany	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	2π

Półprosta o końcu w $(0,0)$ tworząca z OX^+ kąt φ przecina okrąg jednostkowy (tj. okrąg o środku w $(0,0)$ i promieniu 1) w dokładnie jednym punkcie, oznaczmy go przez P_φ.



Współrzędne tego punktu oznaczamy przez $\cos(\varphi)$, $\sin(\varphi)$ (odpowiednio)

$$P_\varphi = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$$ (ten wzór definiuje $\cos(\varphi), \sin(\varphi)$)

Z definicji wynika, że

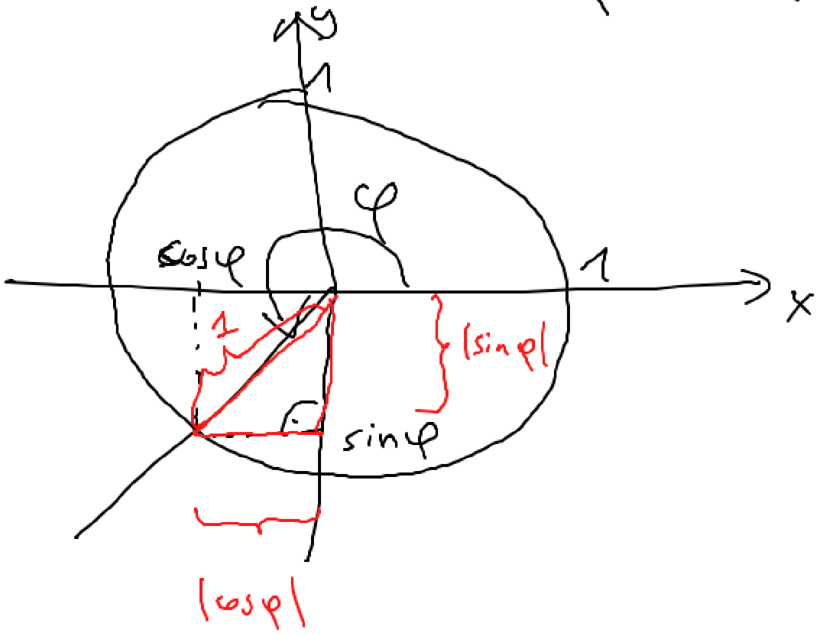
$$-1 \le \cos\varphi \le 1$$
$$-1 \le \sin\varphi \le 1 .$$

zwykle pomijamy nawiasy: $\cos\varphi = \cos(\varphi)$

Z tw. Pitagorasa

$$|\cos\varphi|^2 + |\sin\varphi|^2 = 1$$

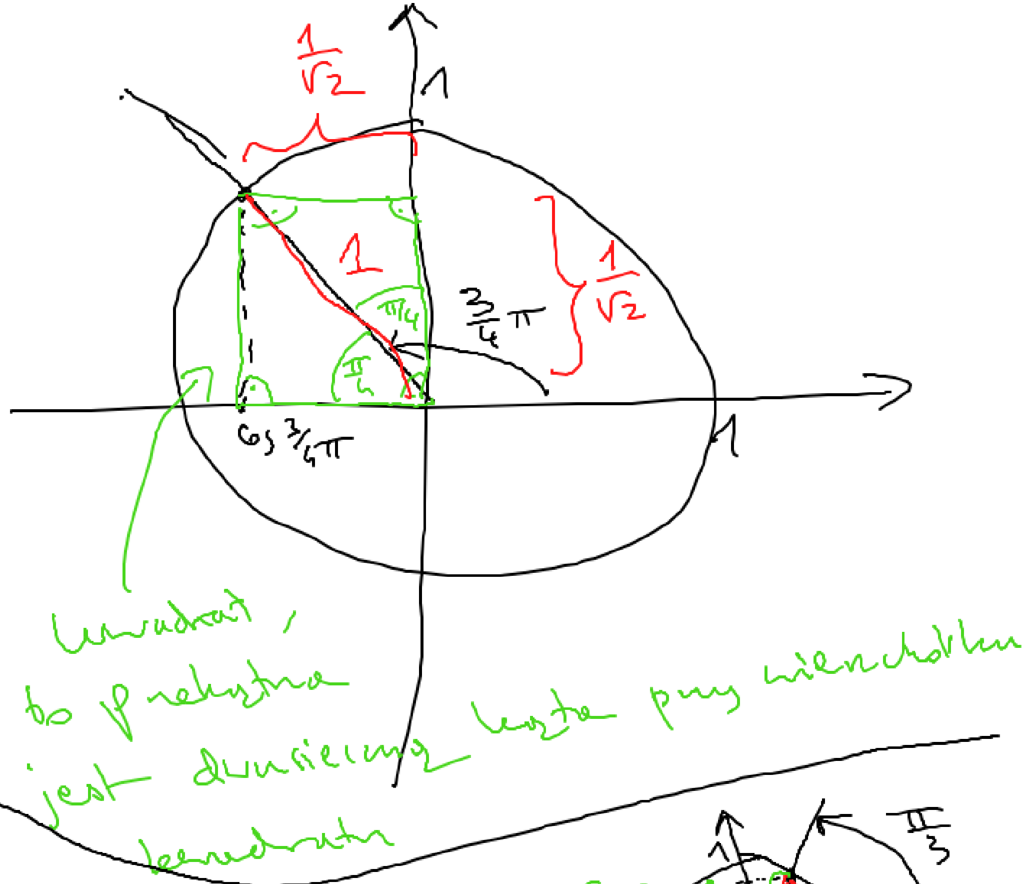
$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$



Uwaga: piszemy zwykle $\cos^2\varphi$ zamiast $(\cos\varphi)^2$

$$\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

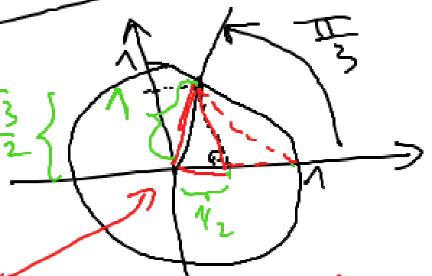
$$\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



Geometrycznie możina znaleźć $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, gdy φ jest całkowitą wielokrotnością $\frac{\pi}{4}$ $(=45^\circ)$ lub $\frac{\pi}{6}$ $(=30^\circ)$.

Np. $\cos\frac{\pi}{3}$, $\sin\frac{\pi}{3}$

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$



połowa jest Δ
równobocznego
(bo ma kąty $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$)