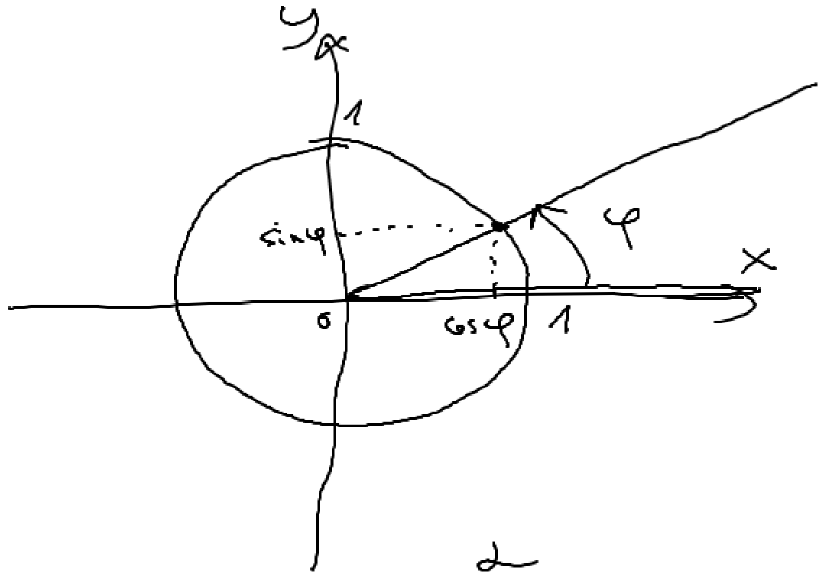
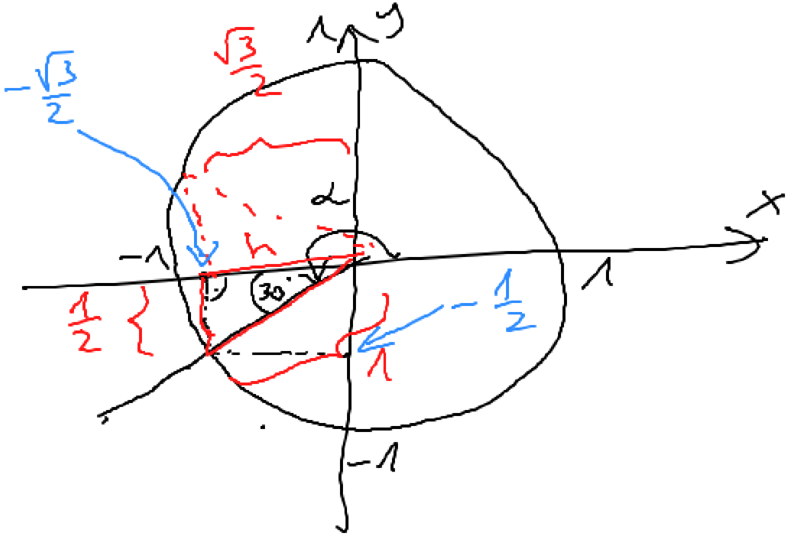




Obliczyć $\sin \overbrace{\frac{7\pi}{6}}^{\alpha} = -\frac{1}{2}$

$\cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + h^2 = 1^2$

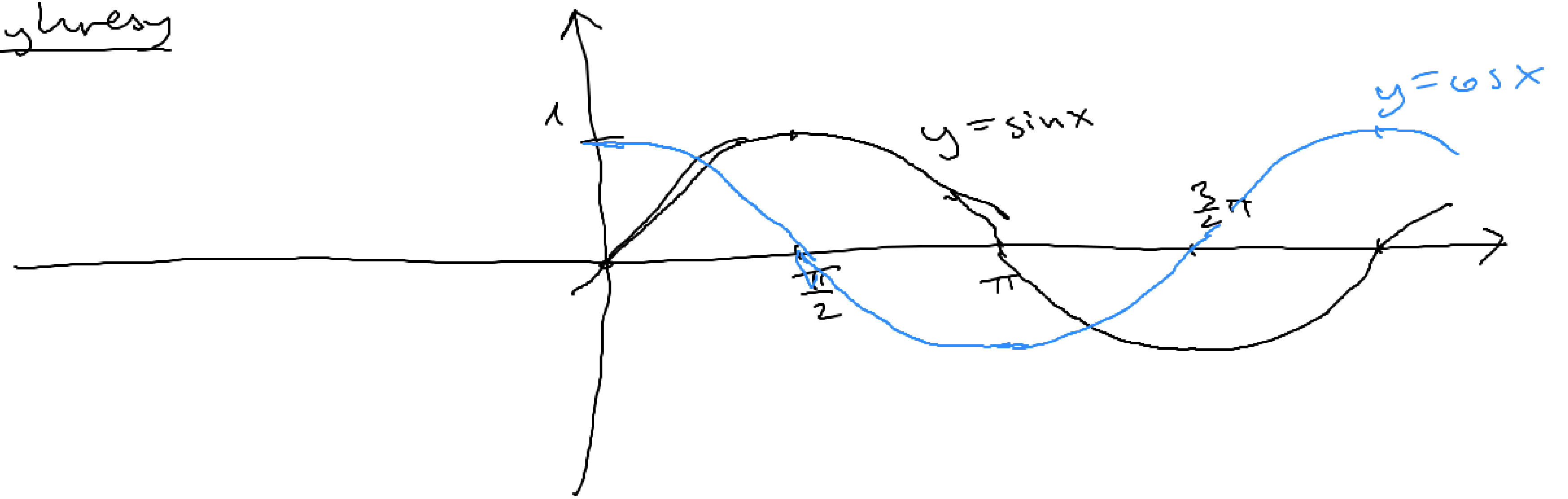
$h^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$h = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\pi = 180^\circ$

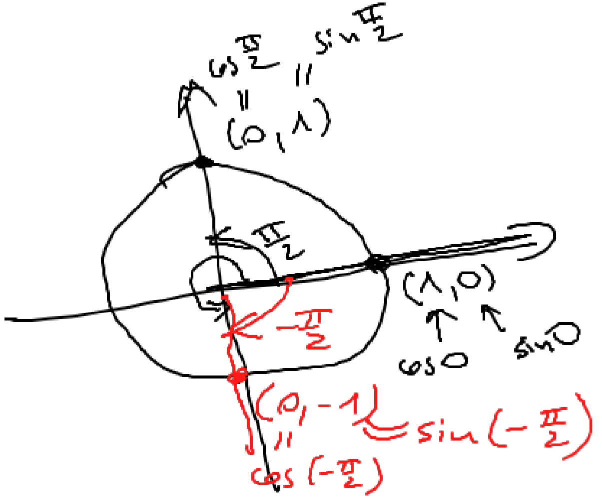
$\frac{7}{6}\pi = 180^\circ + 30^\circ$

Wykresy



$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$



$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} - \sin x \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} = -\sin x$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x+\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos x \underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{0} - \sin x \underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{-1} = \sin x$$

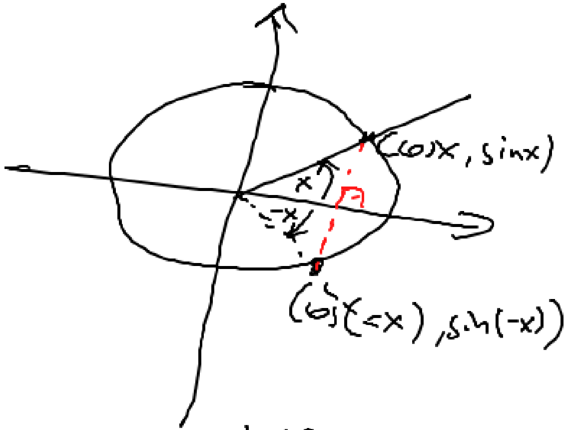
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

weźmy $y = -x$

$$1 = \cos 0 = \cos(x+(-x)) = \cos x \cos(-x) - \sin x \sin(-x) =$$
$$= \cos^2 x + \sin^2 x$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$
$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$



z symetrii:

$$\cos x = \cos(-x)$$
$$\sin x = -\sin(-x)$$

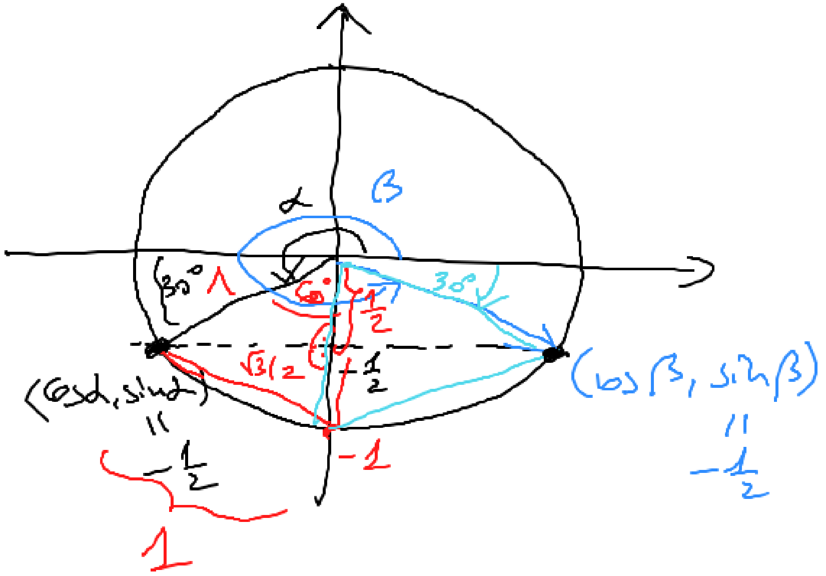
cos — f. parzysta

sin — f. nieparzysta

$$\cos 2x = \cos(x+x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x =$$
$$= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$$
$$= 2\cos^2 x - 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

Rozwiązać równanie $\sin x = -\frac{1}{2}$.



Jednym z rozwiązań jest

$$\alpha = 180° + 30° = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

a drugim

$$\beta = 360° - 30° = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

To są jedyne rozwiązania w przedziale $[0, 2\pi)$.

Ogólne rozwiązania otrzymamy korzystając z 2π-okresowości funkcji sin:

Odp. $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$

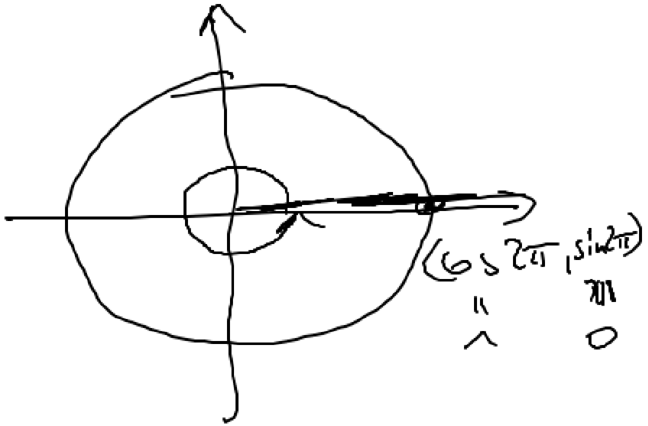
lub $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$ — II —

$$\begin{cases} x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \\ x = \underbrace{-\frac{\pi}{6}}_{\arcsin(-\frac{1}{2})} + 2k\pi \end{cases}$$

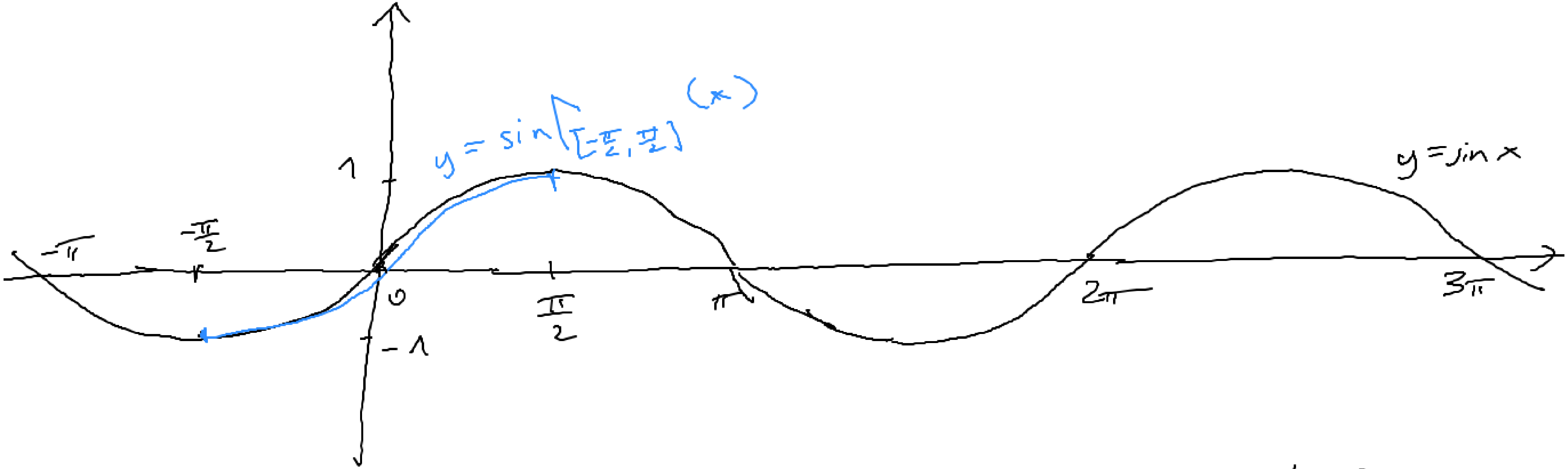
• Funkcije sin, cos so 2π - okrejolne:

$$\cos(x+2\pi) = \cos x \underbrace{\cos 2\pi}_{=1} - \sin x \underbrace{\sin 2\pi}_{=0} =$$

$$= \cos x$$



$$\sin(x+2\pi) = \sin x \underbrace{\cos 2\pi}_{=1} + \underbrace{\sin 2\pi}_{=0} \cos x = \sin x .$$

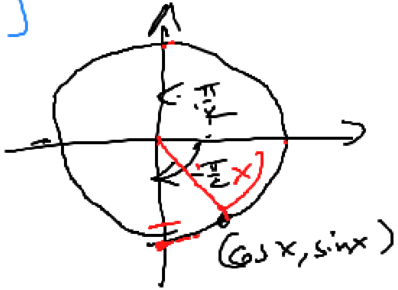


sin nie jest 1-1 więc nie ma funkcji odwrotnej.

Ale $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$, czyli funkcja ~~=~~ w punkcie x równa $\sin x$ dla $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ o dziedzinie $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

jest ściśle rosnąca, a więc różnowartościowa.

$\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ 1-1 i „na”



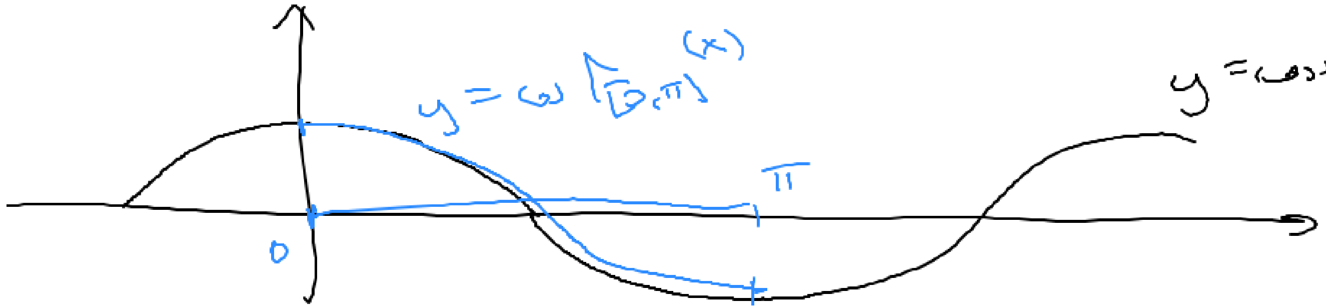
Zatem $\sin\restriction_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ ma funkcję odwrotną, oznaczamy ją symbolem arcsin. $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Z definicji:

$\arcsin y = x \iff \sin\restriction_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(x) = y \iff \sin x = y$ oraz $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$(y \in [-1, 1])$

$$\boxed{\arcsin y = x \iff \left(\sin x = y \text{ oraz } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)}$$



$y=\cos x$ tej nie jest 1-1

Funkcja $\cos\restriction_{[0,\pi]}:[0,\pi]\to[-1,1]$ jest 1-1 i „na”, więc ma funkcję odwrotną, którą oznaczamy symbolem arccos.

$\arccos:[-1,1]\to[0,\pi]$

Dla $y\in[-1,1]$:

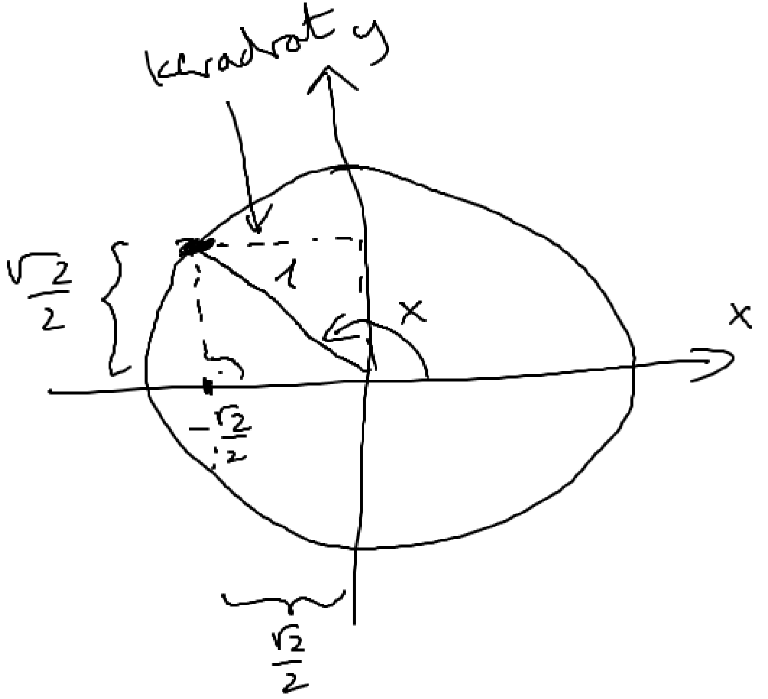
$$\boxed{\arccos y = x \iff \cos x = y \text{ oraz } x\in[0,\pi]}$$

Np.

$$\underbrace{\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{\substack{\parallel \\ x}} = ?$$

to $x \in [0, \pi]$ oraz $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$x = 90^\circ + 45^\circ = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$



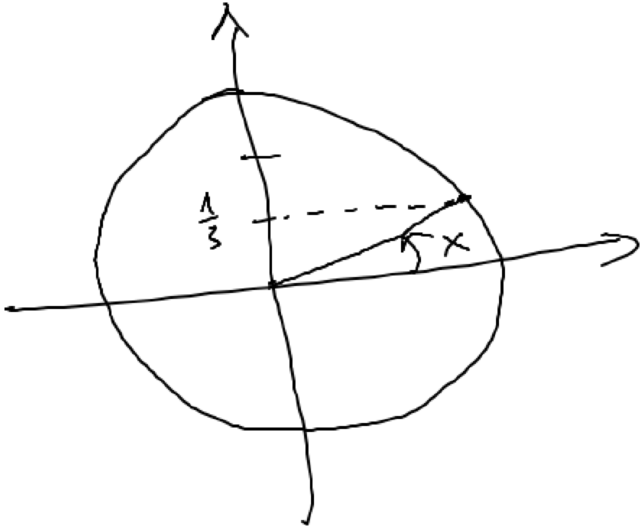
Dla tych ~~wartości~~ argumentów:

$$-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1$$

można obliczyć arccos / arcsin „geometrycznie".

$\arcsin\frac{1}{3} = x$

$\sin x = \frac{1}{3}$

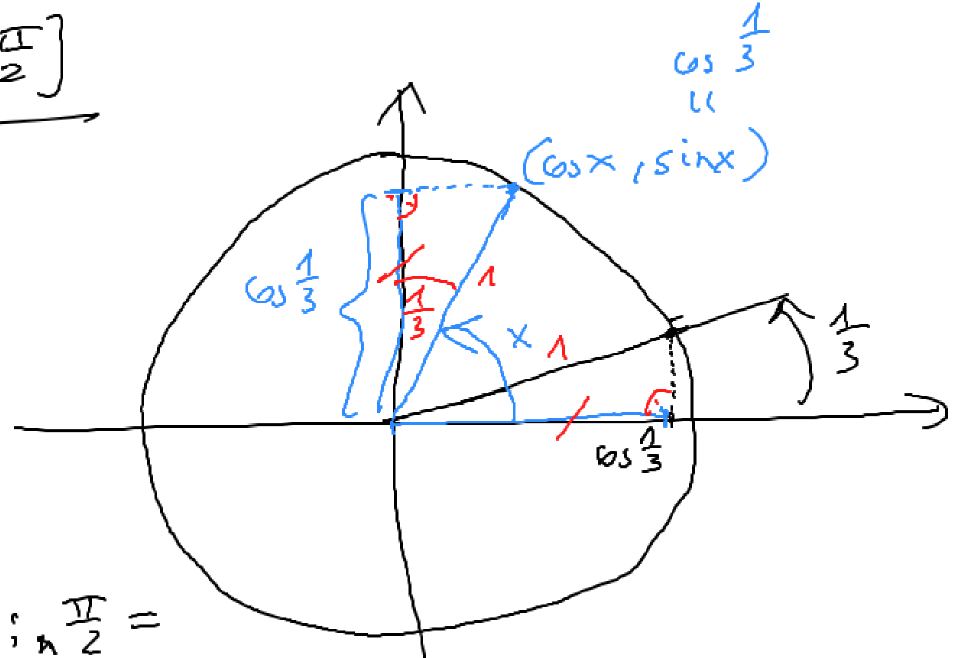


$x = \arcsin\frac{1}{3}$

Np.: $x = \arcsin\left(\cos \frac{1}{3}\right) = ?$

$$\sin x = \cos \frac{1}{3} \quad \text{oraz} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$$



Inaczej:

$$\sin x = \cos\frac{1}{3} = \cos\left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{2}\right)\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} - \sin\left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{2}\right)\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} =$$

$$= -\sin\left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\right)$. Jednym z rozwiązań jest $\tilde{x} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$ i szczęśliwie się składa, że $\tilde{x} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Odp: $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$.

Np. $\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right) = ?$

$\arcsin\frac{1}{3} = x \iff \sin x = \frac{1}{3}$ oraz $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

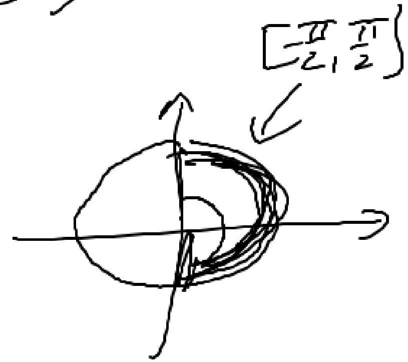
$\cos x = ?$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2$

czyli

$\cos x = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$



Ponieważ $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, to $\cos x \geq 0$, więc

$\cos x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Odp. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Niech $y \in [-1,1]$.
Równanie

$$\sin x = y$$

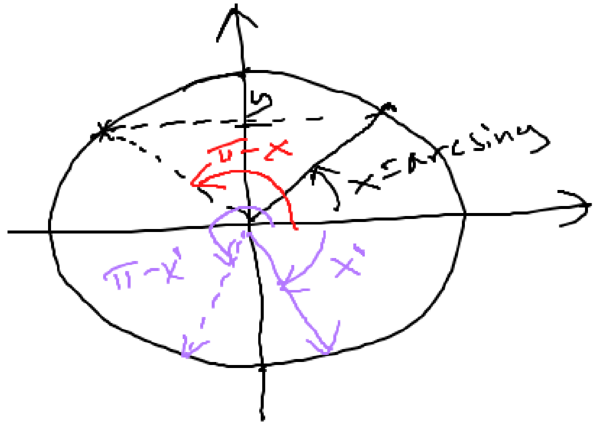
- ma dokładnie jedno rozwiązanie w przedziale $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ i jest nim $x = \arcsin y$

- ma nieskończenie wiele rozwiązań w $\mathbb{R}$ i są one postaci:

1) $x = \arcsin y + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

lub

2) $x = \pi - \arcsin y + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$



Niech $y \in [-1, 1]$

Równanie
$$\cos x = y$$

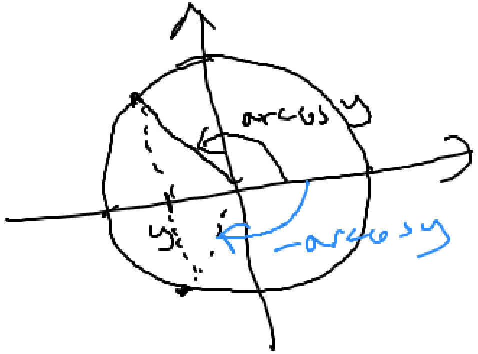
- ma dokładnie jedno rozwiązanie na $[0, \pi]$ i jest nim $x = \arccos y$

- ma nieskończenie wiele rozwiązań na $\mathbb{R}$ i są one postaci

1) $x = \arccos y + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

lub

2) $x = -\arccos y + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.



Np.

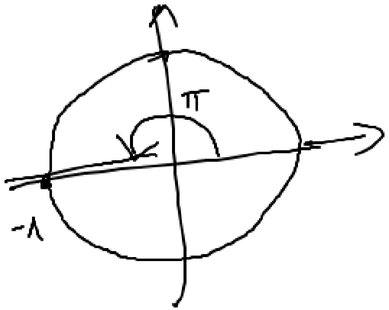
$$\cos x = -1$$

Rozwiązania:

1) $x = \overbrace{\arccos(-1)}^{\pi} + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$

lub

2) $x = -\underbrace{\arccos(-1)}_{\pi} + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$



Czyli

1) $x = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

lub

2) $x = -\pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

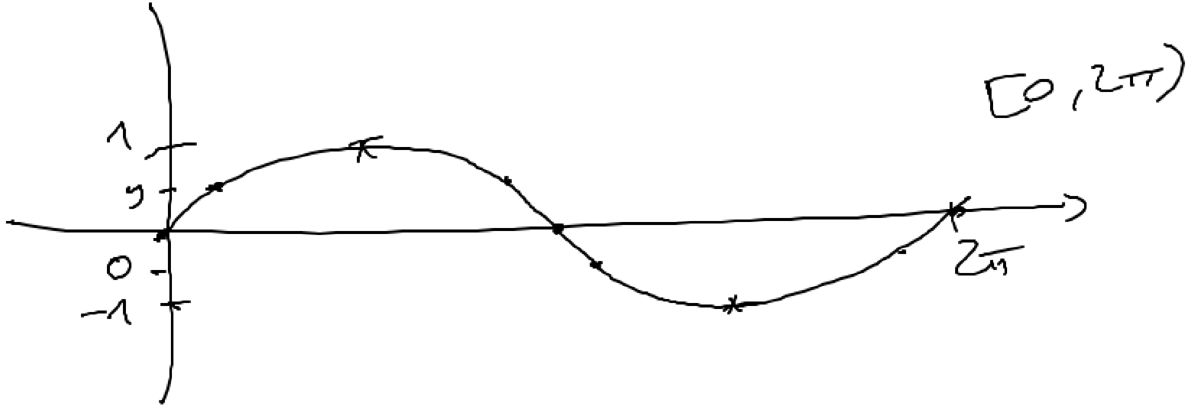
~~Inn~~ Innymi słowy:

1) $x \in \{\ldots, -3\pi, -\pi, \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots\}$

lub

2) $x \in \{\ldots, -5\pi, -3\pi, -\pi, \pi, 3\pi, \ldots\}$

Odp. $x = \pi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$.



Definiujemy:

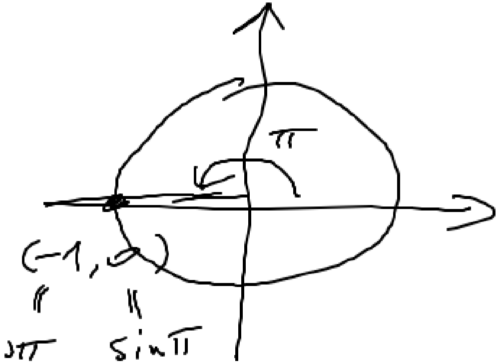
$$tg x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

oraz

$$ctg x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{\sin x \overbrace{\cos\pi}^{-1} + \overbrace{\sin\pi}^{0}\cos x}{\cos x \underbrace{\cos\pi}_{-1} - \sin x \underbrace{\sin\pi}_{0}} =$$

$$= \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$



Rozszerzając definicję funkcji okresowej:

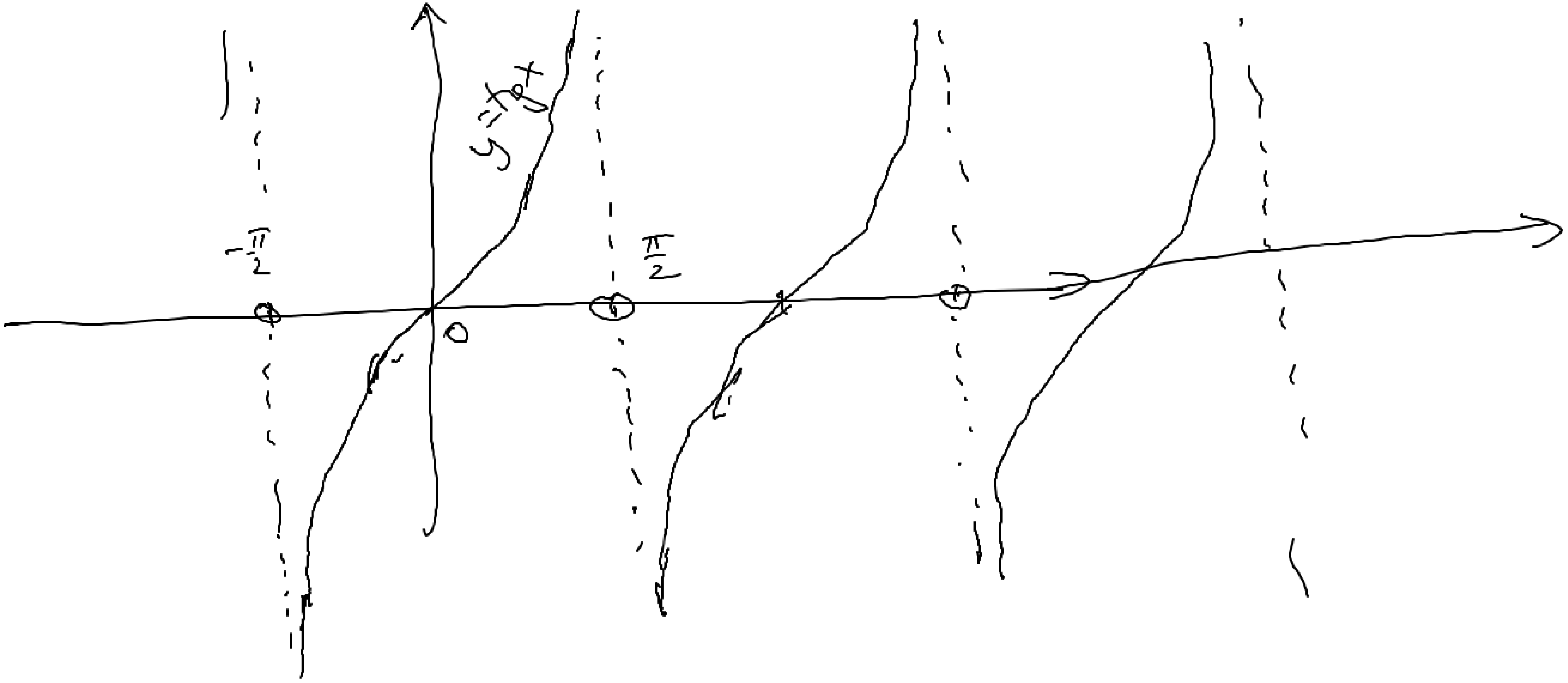
$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ jest okresowa z okresem $T > 0$, jeśli:

1) $\forall_{x \in D}$ $(x - T \in D$ oraz $x + T \in D)$

oraz

2) $\forall_{x \in D}$ $(f(x+T) = f(x))$.

Możemy stwierdzić, że tg jest π-okresowy.
Podobnie ctg jest π-okresowy.



Wykres $y=tgx$.

Wykres $y = ctg\, x$.