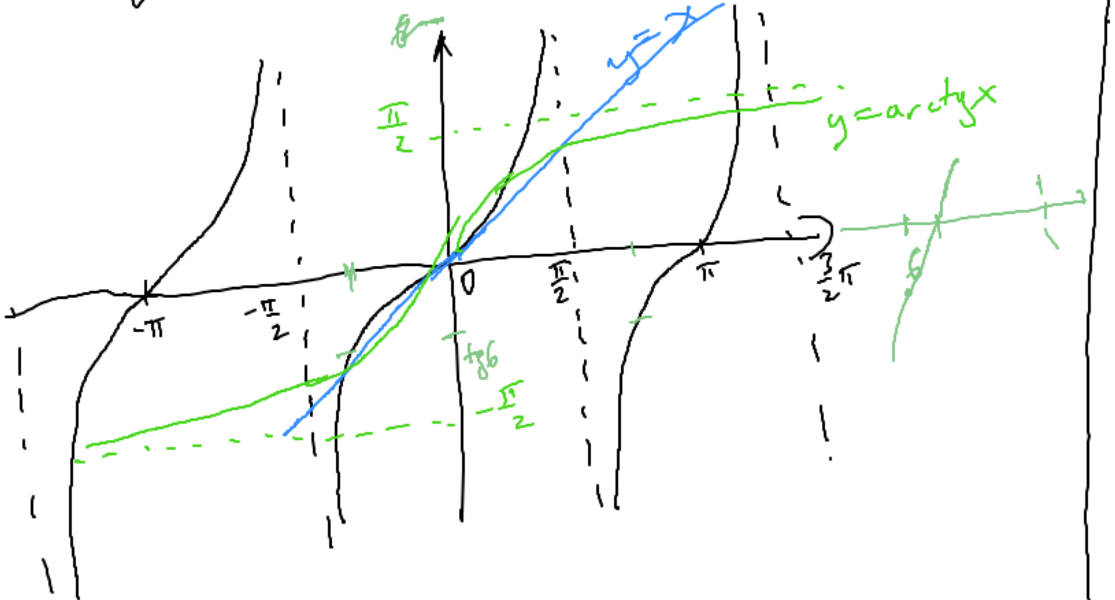
$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$



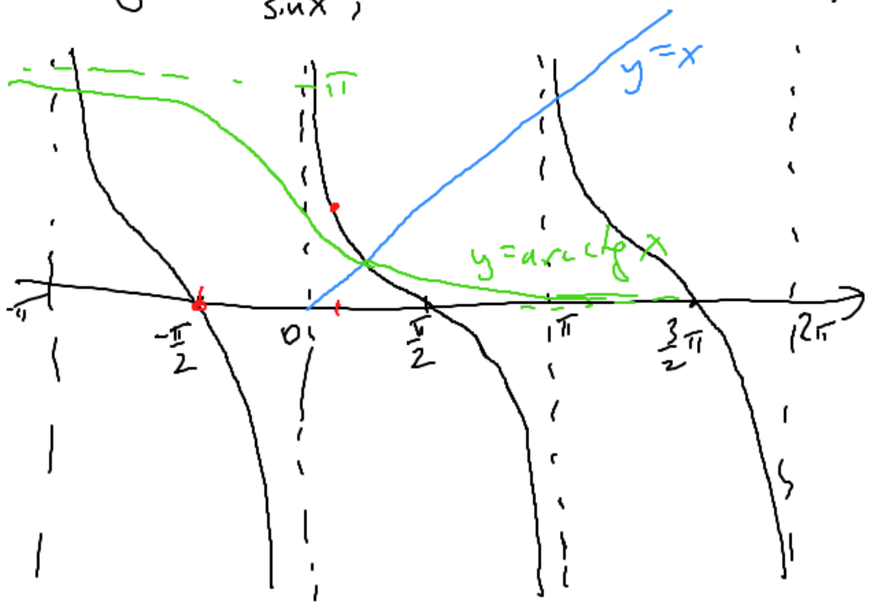
tg nie jest 1-1

Ale $\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} : (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ jest 1-1 i na.

Istnieje więc funkcja odwrotna $\left(\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$,

oznaczamy ją symbolem arctg.

$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$



Czy ctg jest f. malejącą? Nie. (ściśle)

Ale jest malejąca na $(0,\pi)$.

$\operatorname{ctg}|_{(0,\pi)} : (0,\pi) \to \mathbb{R}$ jest 1-1 i „na"

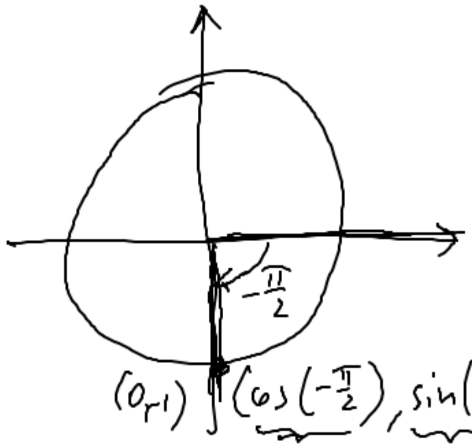
Istnieje f. odwrotna $\left(\operatorname{ctg}|_{(0,\pi)}\right)^{-1} : \mathbb{R} \to (0,\pi)$

oznaczamy ją symbolem arcctg.

Dla $y\in\mathbb{R}$

- $\operatorname{arctg} y = x \iff \left(x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \text{ oraz } \operatorname{tg} x = y\right)$
- $\operatorname{arcctg} y = x \iff \left(x\in(0,\pi) \text{ oraz } \operatorname{ctg} x = y\right)$.

$\Rightarrow \operatorname{arcctg} y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y$



- $\underbrace{\operatorname{arctg} y}_{=\, x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} + \underbrace{\operatorname{arcctg} y}_{=\frac{\pi}{2}-x} = x + \left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{\pi}{2}$.

$\operatorname{tg} x = y$ $\qquad$ $\cancel{w\in(0,\pi)}$, $\cancel{\operatorname{ctg} w = y}$

$\longrightarrow$ $y = \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}\left(\underbrace{\frac{\pi}{2}-x}_{\in(0,\pi)}\right)$

$$y = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin\left(\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\overbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}^{0} + \overbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}^{-1}\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{0} - \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{-1}} = \frac{-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = -\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$\cancel{x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow x+\frac{\pi}{2}\in(0,\pi)}$, $\cancel{\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = y}$ $\Big\} \Rightarrow \cancel{x+\frac{\pi}{2} = \operatorname{arcctg} y}$

$\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(\underbrace{-x}_{=z})$

$\boxed{\operatorname{ctg}\left(-z+\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg} z}$

Nr.

$$x = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{7}\right) = \ ?$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{7}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)},$$

Np. $\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{7}$ jest rozwiązaniem r-nia $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{7}$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7} = \frac{5\pi}{14} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Odp. $\frac{5\pi}{14}$.

Wp.

$$\arctan(\operatorname{tg}(6)) = ?$$

$\parallel$

x , gdzie $\underline{x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}$ i $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 6$

Jednym z rozwiązań jest $x = 6$.

Dowolnym rozwiązaniem jest $x = 6 + k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

Pytanie: jakie trzeba wziąć k, aby $6 + k\pi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$?

$$6 > \frac{\pi}{2}$$

$$6 - \pi > \frac{\pi}{2}$$

$$6 - 2\pi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$\to k = -2$

Czyli $\operatorname{tg}(\underbrace{6 - 2\pi}_{\in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}) = \operatorname{tg} 6$

Odp. $6 - 2\pi$.

Pr:

$$\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)$$

$\arcsin\frac{1}{4} = x$ takie, że $\sin x = \frac{1}{4}$ oraz $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\Downarrow$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$\cos x = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$, ale $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, więc $\cos x = \frac{\sqrt{15}}{4}$

stąd

$$\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{4}\right) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{15}}.$$

Funkcje wykładnicze

Niech $a>0$, $\cancel{a\neq 1}$.

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^m = \underbrace{a\cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ razy}} = a^{m-1}\cdot a \qquad \text{dla } m\in\mathbb{N}$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \qquad \text{dla } m\in\mathbb{N}$$

$$a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a} \qquad \text{dla } m\in\mathbb{N}$$

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \qquad \text{dla } p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N}$$

(Ta definicja jest poprawna).

Np. $a^3 = a^2\cdot a = (a\cdot a)\cdot a$

$a^2 = a^1\cdot a = a\cdot a$

Np. $a^{-4} = \frac{1}{a^4} = \frac{1}{a\cdot a\cdot a\cdot a}$

Np. $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$

Np. $a^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{a^2}$, $a^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{a^3}$.

ale $a^{\frac{2}{6}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$

a^{π} ? $a^{\sqrt{2}}$? $a^{1}, a^{1,4}, a^{1,41}, a^{1,414}, a^{1,4142}, a^{1,41423}$ ...

$\sqrt{2} = 1,414213562\ldots$

Jeśli $a=1$: $1^x = 1$ dla $x \in \mathbb{R}$

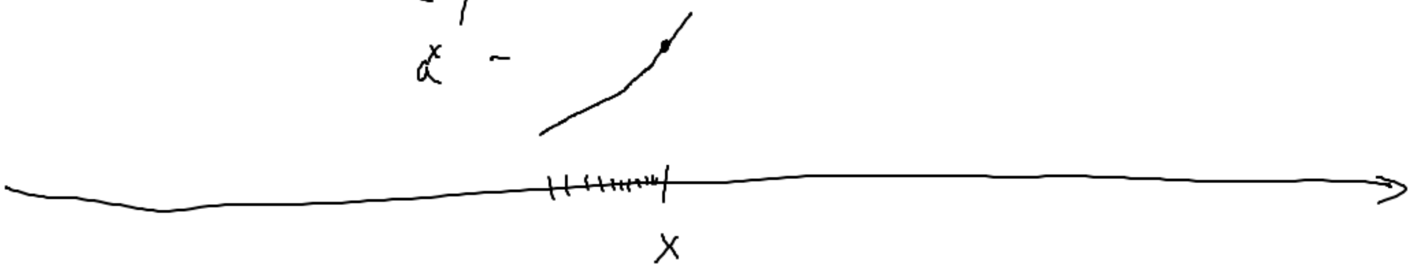
$a>1$: $a^x = \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q},\ q \le x\}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

a^x to jest liczba o następujących własnościach:

1) jeśli $q \in \mathbb{Q}$ i $q \le x$, to $a^q \le a^x$

2) jeśli $\varepsilon > 0$, to istnieje $q \in \mathbb{Q}$, $q \le x$ takie, że $a^q > a^x - \varepsilon$

a^x jest <u>najmniejszą</u> liczbą większą równą od każdego a^q, dla $q \in \mathbb{Q}, q \le x$



np. $x = \sqrt{2}$

Dla $a<1$ określamy $a^x = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$.

<u>Własności:</u> Dla $a>0$

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \qquad , x,y \in \mathbb{R}$$

$$\left(a^x\right)^y = a^{xy} \qquad , x,y \in \mathbb{R}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad , x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad , x,y \in \mathbb{R}$$

[Dość łatwe dla $x,y \in \mathbb{N}$ . . .).

Funkcje wykładnicze

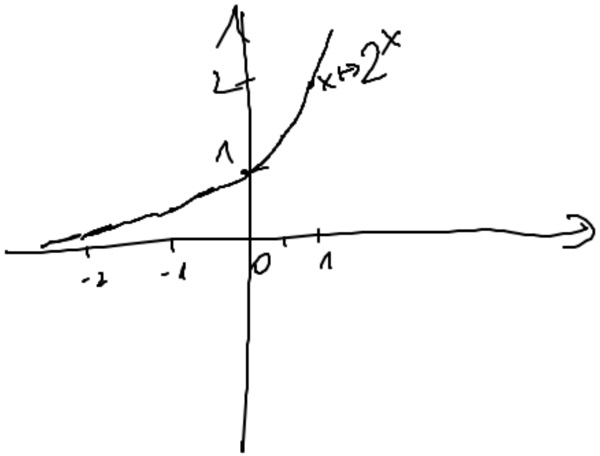
Dla $a > 0$, $a \neq 1$ (ustalonego) określamy <u>funkcję wykładniczą o podstawie</u> a wzorem

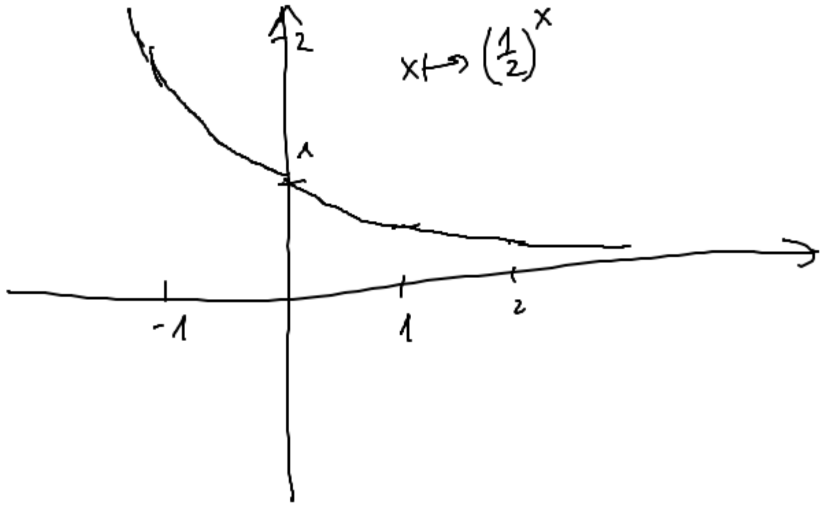
$$f(x) = a^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

zbiór wartości $f = (0, \infty)$.

Dla $a > 1$ f jest rosnąca, a dla $a < 1$ f jest malejąca.





Jeśli $a>0, a\neq 1$, $f(x)=a^x$, to $f: \mathbb{R} \to (0,\infty)$ jest 1-1 i „na",

a więc ma funkcję odwrotną. Oznaczamy ją symbolem $\log_a : (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$\log_2$ — f. odwrotna do funkcji $f(x)=2^x$

Dla $y>0$

$$\log_a y = x \iff a^x = y$$

Np. Dla $y,z>0$.

- $\log_a(yz) = x \iff a^x = y\cdot z = a^u \cdot a^v = a^{u+v}$
- $\log_a y = u \iff a^u = y$
- $\log_a z = v \iff a^v = z$

$$a^x = a^{u+v}$$

Ponieważ f. wykładnicza jest 1-1, więc

$$x = u+v.$$

Zatem $\underbrace{\log_a(yz)} = x = u+v = \underbrace{\log_a y + \log_a z}$. dla $y,z>0$.

Wyprowadziliśmy wzór

$$\log_a(yz) = \log_a y + \log_a z \quad , y, z > 0$$

Podobnie możemy sprawdzić, że:

$$\log_a(y^x) = x \log_a y \quad , x \in \mathbb{R}, \; y > 0$$

$$\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a y \quad , y \in \mathbb{R}$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \quad , x, y > 0$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad , x > 0$$

Wszędzie zakładamy, że $a, b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$.

$\log_a a = 1$

$\log_a(a^x) = x$, $x \in \mathbb{R}$

Wp.

$$\underbrace{\log_4 16}_{= \log_4(4^2) = 2} = \frac{\log_2 16}{\log_2 4} = \frac{\log_2(2^4)}{\log_2(2^2)} = \frac{4}{2}$$

Dla $a > 1$ funkcja $\log_a$ jest ściśle rosnąca

$a \in (0,1)$ -||- ______ malejąca