$\log_a$ – funkcja odwrotna do $x \mapsto a^x$ $\quad (a \in (0,1) \cup (1,\infty))$

$\log_a : (0,\infty) \to \mathbb{R}$

- $\log_2(4\sqrt{2}) = \log_2\left(2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right) = \log_2\left(2^{\frac{5}{2}}\right) = \frac{5}{2}$
- $\log_3 18 = \log_3 2 \cdot 9 = \log_3 2 + \log_3 9 = \log_3 2 + \log_3 (3^2) = (\log_3 2) + 2$

$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad , x,y > 0$

$\log_a(a^x) = x$

Wielomiany

Funkcję wielomianową nazywamy funkcję postaci

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, \qquad x \in \mathbb{R},$$

gdzie $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Jeśli $a_n \neq 0$, to mówimy, że f jest <u>wielomianem stopnia n</u>, ozn. $\deg f = \operatorname{st} f = n$.

<u>Np.</u>

$f(x) = 0$ wielomian zerowy; przyjmujemy, że $\deg f = -\infty$

$f(x) = -3$ –"– stały, stopnia 0

$f(x) = 3x + \pi$ –"– stopnia $\underline{1}$

$f(x) = x^4 + x + 2$ –"– stopnia 4

$= 2 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 1 \cdot x^4$

Iloczyn, suma, różnica f. wielomianowych jest f. wielomianową.

Np.

$$(1+x+x^2)(1-x) = 1+x+x^2-(x+x^2+x^3) = 1-x^3 =$$
$$= 1+0\cdot x+0\cdot x^2+(-1)\cdot x^3$$

Dzielenie wielomianów z resztą

Jeśli P, Q są wielomianami, $Q \neq 0$ (tzn. Q nie jest wielomianem zerowym), to istnieją dokładnie jedna para wielomianów I, R taka, że

$$P = I\cdot Q + R$$

oraz

$$\deg R < \deg Q.$$

$p : q = i$ reszty r

$23 : 5 = 4$ reszty 3

$23 = 4\cdot 5 + 3$

$p = i\cdot q + r, \quad 0 \leq r < q$

$$x^2 + x + 6$$

iloraz

$$(x^4 - x^3 + 2x + 2) : (x^2 - 2x - 4)$$

$$-(x^4 - 2x^3 - 4x^2)$$

$$x^3 + 4x^2 + 2x + 2$$

$$-(x^3 - 2x^2 - 4x)$$

$$6x^2 + 6x + 2$$

$$-(6x^2 - 12x - 24)$$

$$\underbrace{18x + 26}_{\text{reszta}}$$

$x^4 : x^2 = x^2$

Następnie mnożymy dzielnik przez x^2

odejmujemy od dzielnej otrzymany przed chwilą iloczyn

$x^3 : x^2 = x$

mnożymy dzielnik przez x

$6x^2 : x^2 = 6$

mnożymy dzielnik przez 6

$$\underbrace{x^4 - x^3 + 2x + 2}_{\text{dzielna}} = \underbrace{(x^2 - 2x - 4)}_{\text{dzielnik}} \cdot \underbrace{(x^2 + x + 6)}_{\text{iloraz}} + \underbrace{(18x + 26)}_{\text{reszta}}$$

Funkcje wymierne

to funkcje postaci $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie P, Q są wielomianami, oraz $Q \neq 0$.

Dziedzina naturalna jest $\mathbb{R} \setminus \{x : Q(x) = 0\}$.

Np.

$$f(x) = \frac{x^4+1}{x^2-2x-3} = \frac{x^4+1}{(x-3)(x+1)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$$

Ciągi liczbowe

Jeśli $n_0 \in \mathbb{Z}$, to funkcję $a : \{n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots\} \to \mathbb{R}$ nazywamy **ciągiem liczbowym**. Często $n_0 = 0$ lub $n_0 = 1$.

Np. $a(n) = n^2$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ / $a = (n^2)_{n=0}^{\infty} = (0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \ldots)$

$a(0) = 0 = a_0$

$a(1) = 1 = a_1$

$a(2) = 4 = a_2$

$\vdots$

Zwykle oznaczamy $a_n = a(n)$.

Piszemy też:

$$a = (a(n))_{n=n_0}^{\infty} = (a_n)_{n=n_0}^{\infty} = (a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots)$$

Def. Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n=n_0}^{\infty}$ jest:

- ograniczony z góry, jeśli $\exists_{M\in\mathbb{R}} \forall_{n\in\{n_0,n_0+1,\ldots\}} \quad a_n \le M$
- ograniczony z dołu, jeśli $\exists_{M\in\mathbb{R}} \forall_{n\in\{n_0,n_0+1,\ldots\}} \quad a_n \ge M$
- ograniczony, jeśli jest ograniczony i z góry, i z dołu.

Np. $a_n = \frac{1}{n}$, $n=1,2,\ldots$

$$a = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots\right)$$

Zachodzi:
- $a_n \le 1$ dla każdego $n \ge 1$ $\Rightarrow$ (a_n) jest ogr. z góry
- $a_n \ge 0$ — " — $\Rightarrow$ — " — dołu

(a_n) jest ograniczony

Def. Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n=n_0}^{\infty}$ jest:

- <u>(ściśle) rosnący</u>, jeśli $\forall_{n \geq n_0} \left(a_n < a_{n+1} \right)$ $\iff a_{n+1} - a_n > 0$
- <u>(ściśle) malejący</u> od pewnego miejsca, jeśli $\exists_{k \geq n_0} \forall_{n \geq k}$ $\forall_{n \geq \boxed{n_0}} \left(a_n > a_{n+1} \right)$ $\iff a_{n+1} - a_n < 0$
- <u>słabo rosnący</u>, jeśli $\forall_{n \geq n_0} \left(a_n \leq a_{n+1} \right)$ $\iff a_{n+1} - a_n \geq 0$
- <u>słabo malejący</u>, jeśli $\forall_{n \geq n_0} \left(a_n \geq a_{n+1} \right)$ $\iff a_{n+1} - a_n \leq 0$

Mówimy też, że ciąg jest [ściśle/słabo] [rosnący/malejący] <u>od pewnego miejsca</u>, jeśli $\exists_{k \geq n_0}$ takie, że odpowiednia nierówność (jak powyżej) zachodzi dla wszystkich $n \geq k$.

Np.

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad n=1,2\ldots$$

Popatrzmy na

$$a_{n+1}-a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{(n+1)n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

dla $n=1,2,\ldots$ zatem ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ściśle malejący.

Np.

$$a_n = n^2 - 5n \qquad (a_n) = (-4,-6,-6,-4,0,6,14,24,\ldots)$$

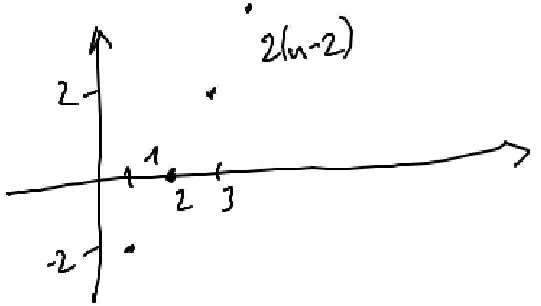
rosnący

Popatrzmy na

$$a_{n+1}-a_n = \underbrace{(n+1)^2-5(n+1)}_{a_{n+1}} - (\underbrace{n^2-5n}_{a_n}) = n^2+2n+1-5n-5-n^2+5n =$$

$$= 2n-4 = 2(n-2) \geq 0 \quad \text{dla } n \geq 3.$$

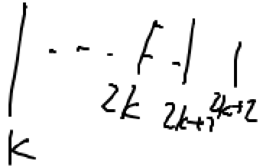
$\Rightarrow (a_n)$ jest rosnący od p. miejsca



Def. Mówimy, że ciąg (a_n) jest monotoniczny (od pewnego miejsca), jeśli (a_n) jest słabo rosnący lub słabo malejący (odpowiednio: od pewnego miejsca).

NIE JEST MONOTONICZNY OD PEWNEGO MIEJSCA

Np.: $a_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \dots$ $\quad (a_1, a_2, a_3, \dots) = (\underset{1}{-1}, \underset{2}{1}, \underset{3}{-1}, \underset{4}{1}, \underset{5}{-1}, 1, -1, 1, -1, \dots)$



Ten ciąg nie jest słabo malejący od miejsca $k \geq 1$, bo

jeśli weźmiemy $n = 2k+1 \geq k$, to $a_n = a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1$

$$a_{n+1} = a_{2k+2} = (-1)^{2k+2} = 1 \qquad a_n < a_{n+1}$$

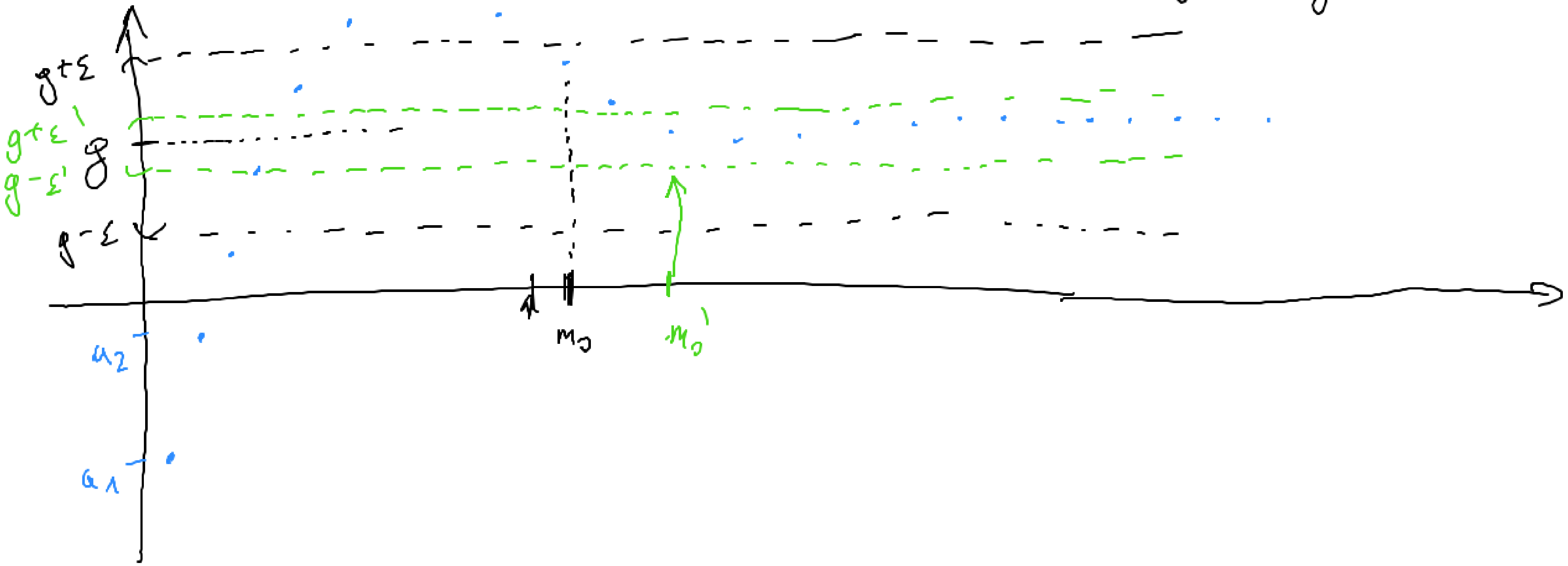
Nie jest też rosnący (słabo) od miejsca $k \geq 1$, bo

biorąc $n = 2k \geq k$: $\quad a_n = (-1)^{2k} = 1, \quad a_{n+1} = (-1)^{2k+1} = -1 \qquad a_n > a_{n+1}$

Def.

Niech $g \in \mathbb{R}$. Mówimy, że ciąg (a_n) ma granicę g, jeśli:

$$\forall_{\varepsilon>0} \; \exists_{n_0} \; \forall_{n \geq n_0} \; \underbrace{|a_n - g| < \varepsilon}_{a_n \in (g-\varepsilon,\, g+\varepsilon)}.$$

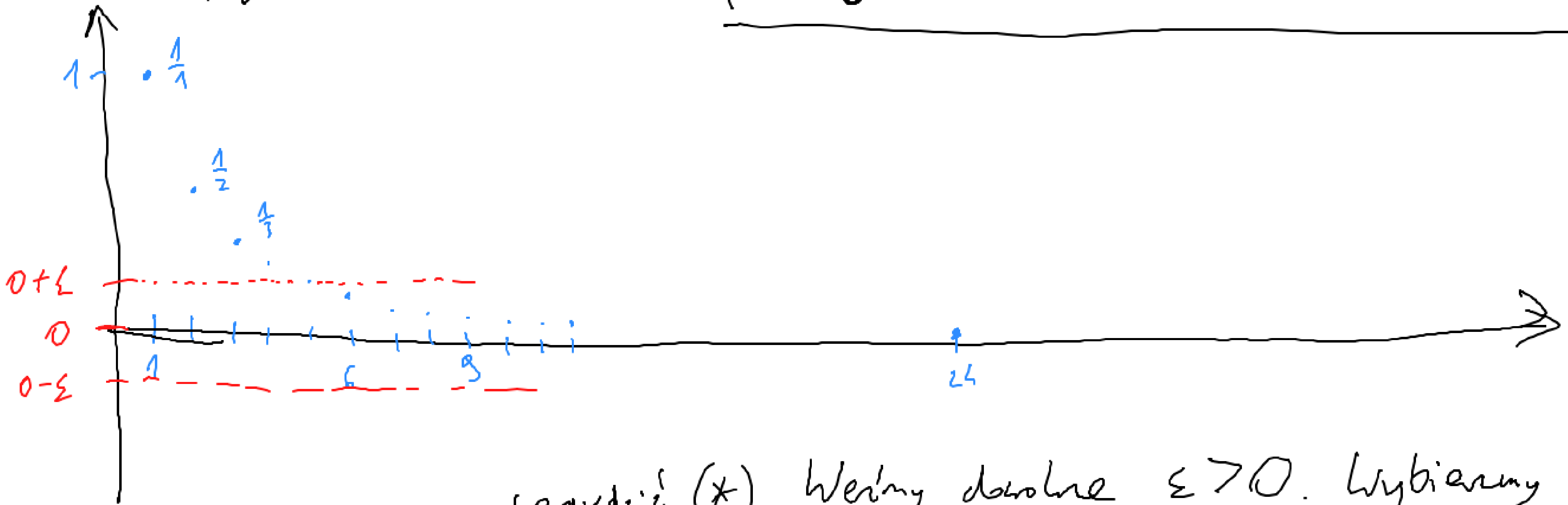


N_1. Twierdzimy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Z def. musimy spr., że

(*) $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{m_0} \forall_{m\geq m_0} \quad |a_m - 0| < \varepsilon$



Uzasadnienie: Musimy sprawdzić (*). Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Wybieramy liczbę naturalną m_0 większą niż $\frac{1}{\varepsilon}$: $m_0 > \frac{1}{\varepsilon}$

Chcemy:

$|a_m| < \varepsilon$ dla $m \geq m_0$

$\left|\frac{1}{m}\right| < \varepsilon$

$\frac{1}{m} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < m$

Wówczas dla dow. $m \geq m_0$ zachodzi:

$m \geq m_0 > \frac{1}{\varepsilon}$

(czyli $m > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{m} < \varepsilon \rightarrow \left|\frac{1}{m}\right| < \varepsilon \rightarrow |a_m - 0| < \varepsilon$

Def.

Mówimy, że ciąg (a_n) (1) ma granicę ∞, jeśli

$$\forall_{M \in \mathbb{R}} \ \exists_{n_0} \ \forall_{n \geq n_0} \quad a_n \geq M$$

(2) ma granicę $-\infty$, jeśli

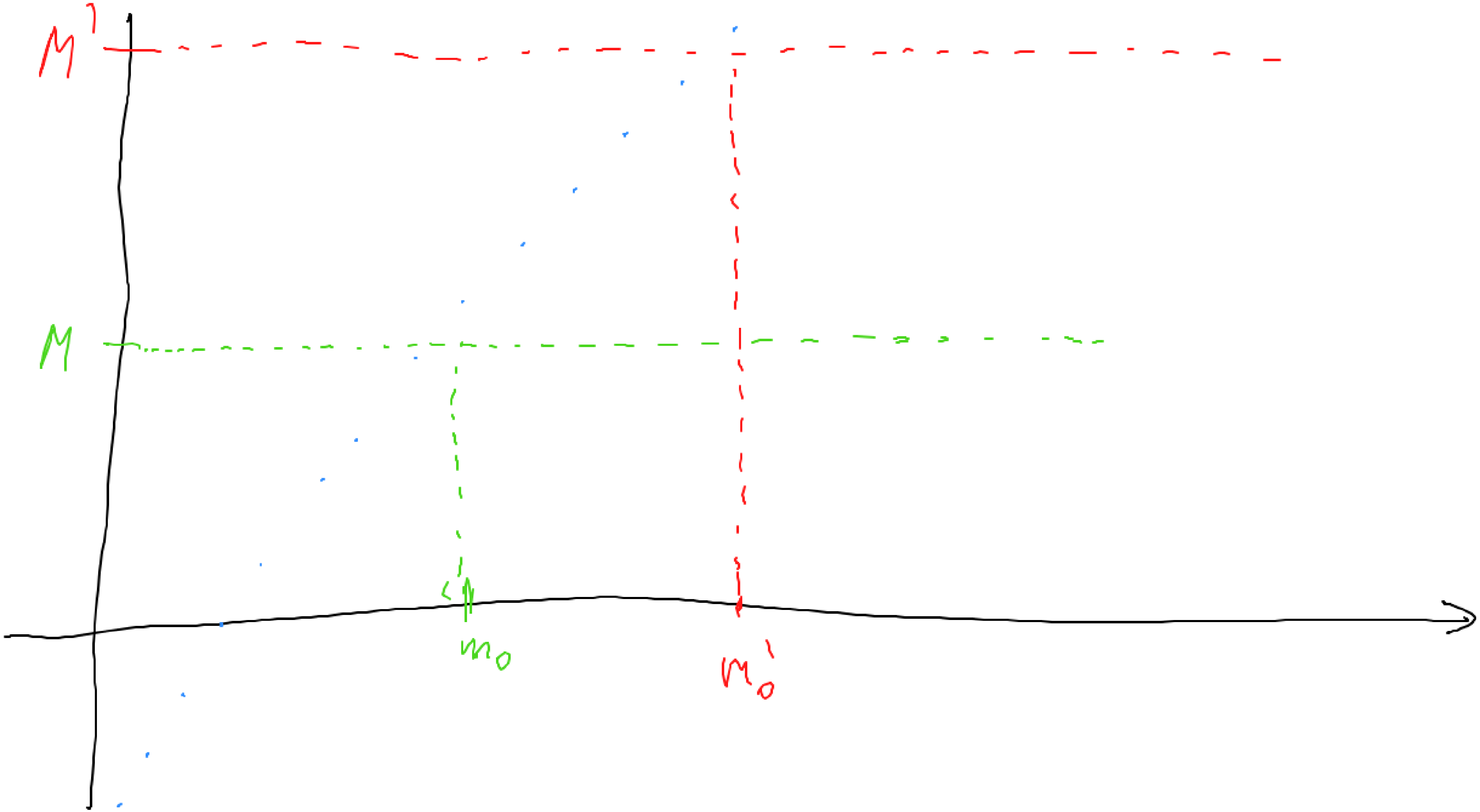
$$\forall_{M \in \mathbb{R}} \ \exists_{n_0} \ \forall_{n \geq n_0} \quad a_n \leq M.$$

Mówimy, że (a_n) ma granicę, jeśli ma granicę $g \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

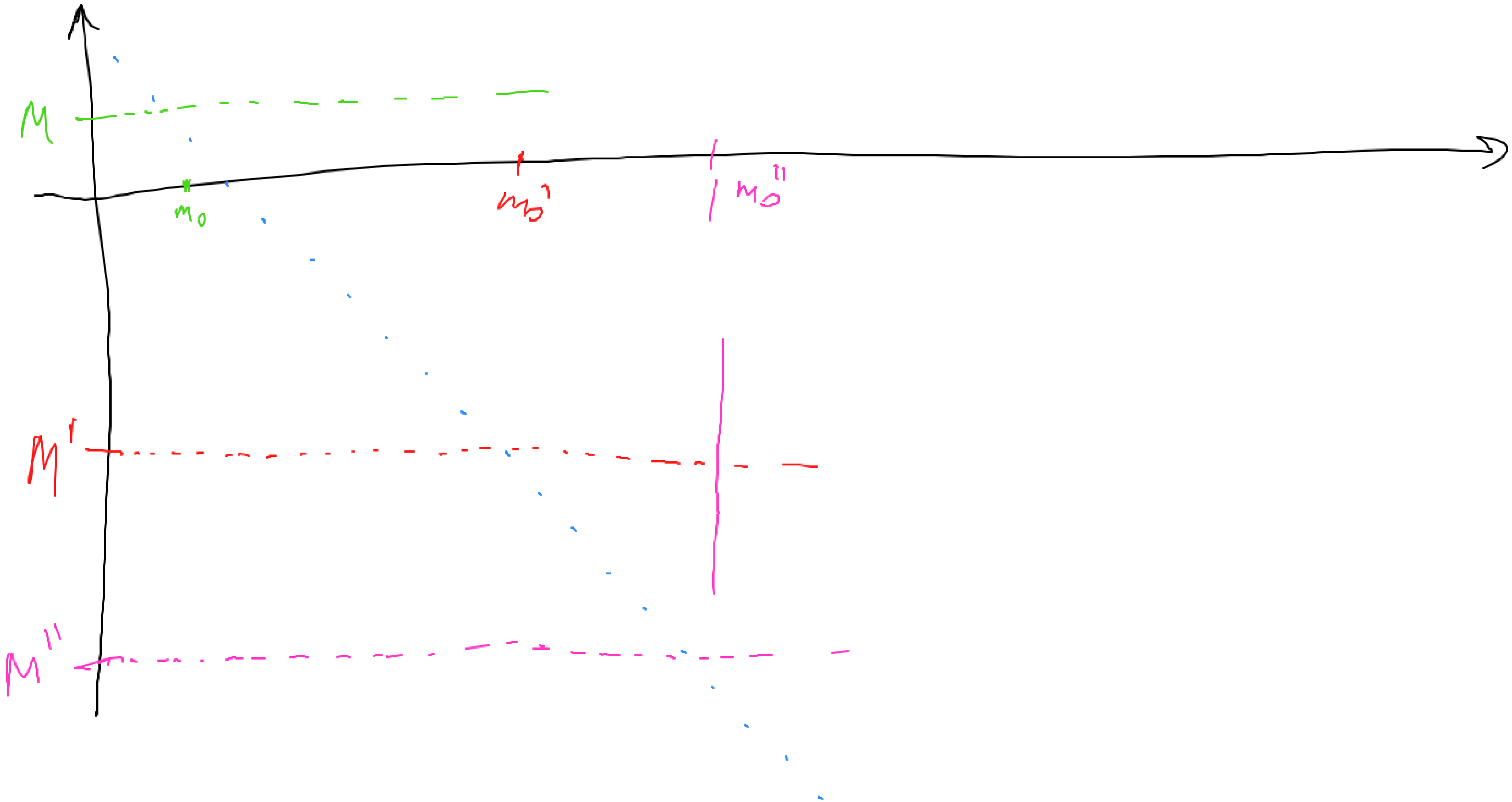
Mówimy, że (a_n) jest zbieżny, jeśli ma granicę $g \in \mathbb{R}$.

Mówimy, że (a_n) jest rozbieżny do $\pm\infty$, jeśli ma granicę $\pm\infty$ (odpowiednio).

(a_n) ma granicę $+\infty$: $\forall_{M\in\mathbb{R}} \exists m_0 \ \forall_{m\geq m_0} \ a_m \geq M$



(a_n) ma granicę $-\infty$: $\forall_{M \in \mathbb{R}} \; \exists n_0 \; \forall_{n \geq n_0} \; a_n \leq M$



Oznaczenie:

Jeśli ciąg (a_n) ma granicę $g \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$,

to piszemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g$$

Możemy pisać „$\lim_{n\to\infty} a_n$ nie istnieje", co oznacza, że nie istnieje $g \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ takie, że (a_n) ma granicę g.