$$\overbrace{3}^{a_n} = \sqrt[n]{3^n} \le \overbrace{\sqrt[n]{2^n+3^n}}^{b_n} \le \sqrt[n]{3^n+3^n} = \sqrt[n]{2\cdot 3^n} = \overbrace{\sqrt[n]{2}\cdot 3}^{c_n}$$

$$3 \xrightarrow{n\to\infty} 3$$

$$\sqrt[n]{2} \to 1, \quad 3 \to 3, \qquad \sqrt[n]{2}\cdot 3 \to 3$$

Widzimy, że $a_n \le b_n \le c_n$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 3$. Zatem

z tw. o 3 ciągach: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 3$.

Tw. (o ciągu monotonicznym i ograniczonym)

Jeśli ciąg (a_n) jest monotoniczny i ograniczony, to ma granicę skończoną.

Np. $a_n = \frac{1}{1\cdot 2^1} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{n\cdot 2^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\cdot 2^k}$

$a_1 = \frac{1}{1\cdot 2^1}$

$a_2 = \frac{1}{1\cdot 2^1} + \frac{1}{2\cdot 2^2}$

$$\sum_{k=1}^{1} a_k := a_1, \quad \sum_{k=1}^{n+1} a_k \overset{(*)}{:=} a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\sum_{k=1}^{4} a_k = a_4 + \sum_{k=1}^{3} a_k = a_4 + a_3 + \sum_{k=1}^{2} a_k = a_4 + a_3 + a_2 + \sum_{k=1}^{1} a_k = a_4 + a_3 + a_2 + a_1 =$$
$$= a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

korzystamy z (*) dla $n=3$ — (*) dla $n=2$ — (*) dla $n=1$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot 2^k} \implies \text{jest zbieżny}$$

(a_n) jest rosnący:

$$a_{n+1} - a_n = \Big(\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2^1} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \ldots + \frac{1}{n\cdot 2^n}} + \frac{1}{(n+1)\,2^{n+1}}\Big) - \Big(\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2^1} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \ldots + \frac{1}{n\cdot 2^n}}\Big) =$$

skracają się

$$= \frac{1}{(n+1)\,2^{n+1}} > 0 \quad , \text{ czyli } a_{n+1} > a_n .$$

(a_n) jest ograniczony:

$a_n > 0$ — (a_n) jest ogr. z dołu przez 0

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot 2^k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 1$$

ogr. z góry