Określamy wartości następujących wyrażeń.

$\infty + \infty = \infty$

$-\infty - \infty = -\infty$

$-(\infty) = -\infty \quad , \quad -(-\infty) = \infty$

$$\infty \cdot a = \begin{cases} \infty & , a \in (0, \infty] \\ -\infty & , a \in [-\infty, 0) \end{cases}$$

$\frac{1}{\infty} = 0 \quad , \quad \frac{1}{-\infty} = 0 \quad ,$

$\frac{a}{\infty} = a \cdot \frac{1}{\infty} = a \cdot 0 \quad , \quad \frac{a}{-\infty} = a \cdot \frac{1}{-\infty} = a \cdot 0$

$\frac{\infty}{b} = \infty \cdot \frac{1}{b} \quad , \quad \frac{-\infty}{b} = -\infty \cdot \frac{1}{b}$

Jeśli $a+b$ lub $a \cdot b$ jest określone, to $b+a$, $b \cdot a$ jest tak samo określone

Nie określamy wartości:

$\infty - \infty$

$-\infty + \infty$

$0 \cdot \infty \quad , \quad \infty \cdot 0$

$0 \cdot (-\infty) , \quad (-\infty) \cdot 0$

$\frac{a}{0}$ (a – dowolne)

$\frac{\infty}{\infty} , \quad \frac{-\infty}{\infty} , \quad \frac{-\infty}{-\infty} , \quad \frac{\infty}{-\infty}$

Tw. (o arytmetyce granic)
Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ istnieją, to

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B,$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = A - B,$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = A \cdot B$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B} \qquad (b_n \neq 0)$$

o ile wyrażenia po prawej stronie są określone.

np. jeśli

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -2$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty,$$

to

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = -2 \cdot (-\infty) = \infty$$

Tw.

Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, przy czym:

(1) $b_n > 0$ dla każdego n, to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} \infty, & A \in (0, \infty] \\ -\infty, & A \in [-\infty, 0) \end{cases}$$

piszemy też $b_n \to 0^+$

lub

(2) $b_n < 0$ dla każdego n, to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} -\infty, & A \in (0, \infty] \\ \infty, & A \in [-\infty, 0) \end{cases}$$

piszemy też $b_n \to 0^-$

Np. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{2}{0^+} = \infty$ $\quad \left(2-\frac{1}{n} \to 2, \ \frac{1}{n} \to 0^+\right)$

Inaczej: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\underbrace{2n}_{\to\infty}-\underbrace{1}_{\to 1}}{1} = \infty$

Określony:

$$a^{\infty} = \begin{cases} \infty, & \text{gdy } a \in (1, \infty] \\ 0, & \text{gdy } a \in [0, 1) \end{cases}$$

$$\infty^{a} = \begin{cases} \infty, & \text{gdy } a \in (0, \infty] \\ 0, & \text{gdy } a \in [-\infty, 0) \end{cases}$$

Nie określony

1^{∞}

∞^{0}

0^{0}, 0^{a} gdy $a<0$

Tw. Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, $a_n > 0$ dla każdego n, równości

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = A^{B},$$

jeśli symbol po prawej stronie jest określony.

Było:

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$$

W1:

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\to 1}^{\overbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{\to \frac{1}{2}}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1$$

Ciąg $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Powiedzmy, że dajemy 1 zł na lokatę opr. 100% rocznie, z różną kapitalizacją.
Ile będziemy mieli po roku?

1% rocznie.

$$1+\frac{1}{100}$$

$$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{100}$$

$$\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{100}\right)^2$$

$\vdots$

- przy kapitalizacji rocznej: $1+1=2$
- -||- 2x rok: po pół roku $1+\frac{1}{2}$
  po roku: $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$
- -||- 3x rok: po $\frac{1}{3}$ roku: $1+\frac{1}{3}$
  po $\frac{2}{3}$ roku: $\left(1+\frac{1}{3}\right)^2$
  po $\frac{3}{3}$ roku: $\left(1+\frac{1}{3}\right)^3$
- -||- n x rok: po $\frac{1}{n}$ roku: $1+\frac{1}{n}$
  po roku: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$\left(1+\frac{\left(\frac{1}{100}\right)}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\frac{1}{100}}$$

Ciąg $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący (ścisły dowód pomijamy). Jest też ograniczony (dowód pomijamy)

Z tw. o ciągu monotonicznym i ograniczonym wnioskujemy, że ciąg $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ jest zbieżny do pewnej liczby rzeczywistej, oznaczmy ją przez e.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281828\ldots \quad (e \text{ nie jest wymierne!})$$

(nie jest okresowe)

<u>Fakt.</u> Jeśli $a\in\mathbb{R}$, to $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$. Ogólniej, jeśli $b_n \to \infty$, to

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{b_n}\right)^{b_n} = e^a}$$

<u>Przykład</u>

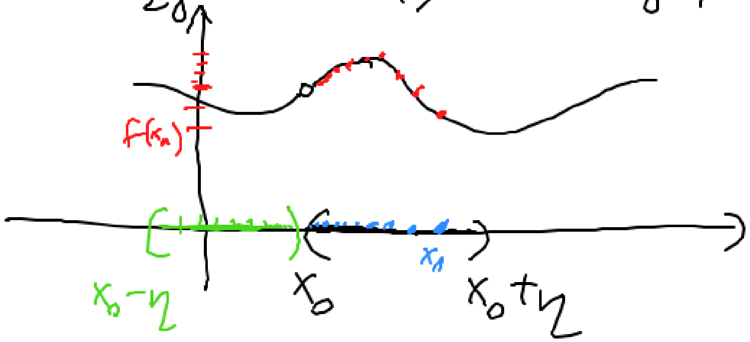
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{2}{n}\right)}_{\downarrow\, 1}^{\overbrace{n+1}^{\infty}} = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}_{\downarrow\,(\text{fakt})\; e^2}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{2}{n}\right)}_{\downarrow\, 1} = e^2\cdot 1 = e^2.$$

1^∞ – symbol nieoznaczony

Granice funkcji (definicja Heinego)

$(x_0-\eta, x_0) \subset D$

Załóżmy, że $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, przy czym $(x_0, x_0+\eta) \subset D$ dla pewnych $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz $\eta > 0$. Jeśli dla dowolnego ciągu (x_n) takiego, że:



1) $x_n \in D$
2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$
3) $x_n > x_0$ $\quad$ $\underline{x_n < x_0}$

istnieje granica $g = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$, to wówczas jest ona taka sama dla każdego takiego ciągu x_n i mówimy wtedy, że funkcja f ma granicę prawostronną (lewostronną) w punkcie x_0 równą g, w skrócie: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = g$. / $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = g$.

Np.:

$$f(x) = x^2 - x \quad , \; D_f = \mathbb{R}$$

Sprawdzimy, że granicą prawostronną f w punkcie 3 jest 6.

Weźmy dowolny ciąg (x_n) o nast. własnościach:

1) $x_n \in \mathbb{R}$
2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$
3) $x_n > 3$

gdyby $x_n < 3$, to nic by się nie zmieniło ...

Wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n^2 - x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{x_n}_{\to 3} \cdot \underbrace{(\underbrace{x_n}_{\to 3} - 1)}_{\to 2} = 3 \cdot 2 = 6. \Rightarrow \underline{\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 6.}$

... więc $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 6.$

Def. Niech $x_0 \in \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$. Jeśli granice jednostronne

$$a = \lim_{x \to x_0^-} f(x), \quad b = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

istnieją i są równe $(a=b)$, to mówimy, że f ma granicę obustronną w x_0 równą a; piszemy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.

Równoważna definicja: Niech $x_0 \in \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$, $g \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.
Jeśli dla pewnych $x_0 \in \mathbb{R}$ i $\eta > 0$ zachodzi $(x_0 - \eta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \eta) \subset D$
oraz dla dowolnego ciągu (x_n) o nast. własnościach:

1) $x_n \in D$

i

2) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$

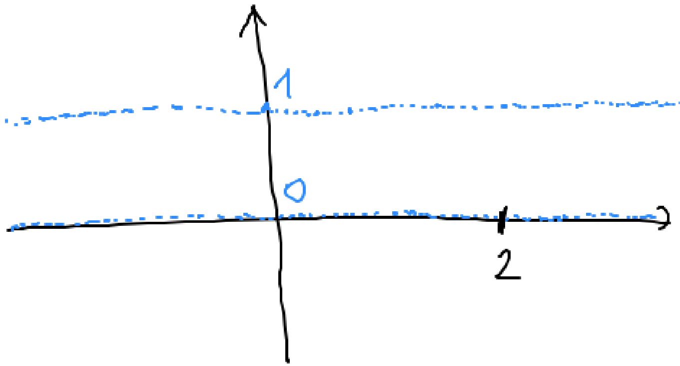
i

3) $x_n \neq x_0$

zachodzi $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = g$, to wtedy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$.

Przykład

Niech $f(x)=\begin{cases} 1, & x\in\mathbb{Q} \\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$



Pokażemy, że granica $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ nie istnieje.

- Wybieramy ciąg $x_n = 2+\frac{1}{n}$. 1) $x_n\in D_f$, 2) $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$, 3) $x_n>2$

oraz $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(\underbrace{2+\tfrac{1}{n}}_{\in\mathbb{Q}}) = 1$.

- Wybieramy ciąg $\tilde{x}_n = 2+\frac{\sqrt{2}}{n}$. 1) $\tilde{x}_n\in D_f$, 2) $\lim_{n\to\infty}\tilde{x}_n = 2$, 3) $\tilde{x}_n>2$,

oraz $\lim_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n) = \lim_{n\to\infty} f(\underbrace{2+\tfrac{\sqrt{2}}{n}}_{\notin\mathbb{Q}}) = 0$.

$\boxtimes$

Nf:

(*) $\lim_{x \to 1} \frac{x}{(x-1)^2}$

$f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, dla dow. $\eta > 0$ $(1-\eta, 1) \cup (1, 1+\eta) \subset D_f$ | $x_0 = 1$

Weźmy dowolny ciąg (x_n) o nast. własnościach:

1) $x_n \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

2) $\lim_{n \to \infty} x_n = 1$

3) $x_n \neq x_0 = 1$ $\Rightarrow$ $x_n - 1 \neq 0$, czyli $(x_n - 1)^2 > 0$

Liczymy: $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{\overset{\to 1}{x_n}}{\underbrace{(x_n-1)^2}_{\to 0^+}} = \frac{1}{0^+} = \infty$

$\Rightarrow$ (*) istnieje i $= \infty$.

Tw. (o arytmetyce granic)

Załóżmy, że $A=\lim_{x\to x_0} f(x)$, $B=\lim_{x\to x_0} g(x)$ istnieją. Wówczas

1)* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$,

2) $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = A\cdot B$

3) $\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = A+B$

4) $\lim_{x\to x_0} (f(x)-g(x)) = A-B$

*(w 1) zakładamy dodatkowo, że $g(x)\neq 0$ dla $x\in(x_0-\eta, x_0)\cup(x_0, x_0+\eta)$ i pewnego $\eta>0$),

o ile wyrażenia po prawej stronie mają sens.

Uwaga. Można zastąpić wszystkie wystąpienia „$\lim_{x\to x_0}$" przez a) „$\lim_{x\to x_0^-}$" lub b) „$\lim_{x\to x_0^+}$",

wówczas w 1) zakładamy, że $g(x)\neq 0$ dla a) $x\in(x_0-\eta, x_0)$,
b) $x\in(x_0, x_0+\eta)$.

N_1:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\overbrace{x^2-4}^{\to 0}}{\underbrace{x-2}_{\to 0}} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} (x+2) = 4 .$$

Uwaga. Jeśli $f(x) = c$ (f. stała), to $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = c$.

Jeśli $f(x) = x$, to $\lim_{x\to x_0} f(x) = x_0$.

N_1:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} \quad ?$$

Tw. Jeśli $A=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $B=\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)$, $f(x)>0$ dla $x\in \cancel{(x_0-\eta,x_0)}\cup(x_0,x_0+\eta)$,

to

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)^{g(x)} = A^B,$$

o ile symbol po prawej ma sens.

Uwaga. Tutaj również można zastąpić granicę obustronną przez jednostronną, modyfikując odpowiednio założenie o tym, że $f(x)>0$. Np. zaznaczono.

Np.

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{x} = \lim_{x\to 1}(x)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1.$$

№4:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\overbrace{x^2-1}^{\to 0}}{\underbrace{\sqrt{x}-1}_{\downarrow\, 0}} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x+1)}{\sqrt{x}-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \underbrace{(\sqrt{x}+1)}_{\downarrow\, 2}\underbrace{(x+1)}_{\downarrow\, 2} = 4$$

(*) $\lim_{x \to 1} \frac{\overbrace{x+1}^{\to 2}}{\underbrace{x-1}_{\to 0}}$

policzmy osobno:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\overbrace{x+1}^{\to 2}}{\underbrace{x-1}_{\to 0^+}} = \frac{2}{0^+} = \infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\overbrace{x+1}^{\to 2}}{\underbrace{x-1}_{\to 0^-}} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

Granice jednostronne istnieją, ale nie są sobie równe.

Zatem (*) nie istnieje.