Granica funkcji w $\pm\infty$:

- Załóżmy, że $f: D \to \mathbb{R}$ oraz dla pewnego $a \in \mathbb{R}$ zachodzi $(a, \infty) \subset D$.

Niech $g \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Jeśli dla dowolnego ciągu (x_n) takiego, że

1) $x_n \in D$
2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$, to mówimy, że f ma w ∞ granicę równą g.

Ozn. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = g$.

- Załóżmy, że $f: D \to \mathbb{R}$ oraz dla pewnego $a \in \mathbb{R}$ zachodzi $(-\infty, a) \subset D$.

Niech $g \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Jeśli dla dow. ciągu (x_n) t. że

1) $x_n \in D$
2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$

zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$, to mówimy, że f ma w $-\infty$ granicę równą g.

Ozn. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = g$.

Zachodzi podobne twierdzenie o arytmetyce granic dla granic funkcji w $\pm\infty$.

Zachodzi też $\lim_{x\to\infty} x = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} c = c$ (c - stała)

Np.

- $$\lim_{x\to\infty}(\underbrace{x^4}_{\infty^4=\infty} - \underbrace{x^2}_{\infty} + \underbrace{2}_{2}) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{x^4}_{\infty}\underbrace{\left(1 - \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{2}{x^4}}_{\to 0}\right)}_{1} = \infty\cdot 1 = \infty$$

  ($x^2 \to \infty$, $x^4 \to \infty$)

- $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\overbrace{\sqrt{x^2+2}}^{\to\infty}}{\underbrace{x}_{-\infty}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\overbrace{\sqrt{x^2}}^{-x}\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{2}{\underbrace{x^2}_{-\infty\cdot(-\infty)=\infty}}}\right) = -1$$

gdy $x\to-\infty$, to można założyć,

że $x<0$,

wtedy $\sqrt{x^2} = -x$

$\left\{ \sqrt{x^2} = |x| \right.$

Fakt.

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a>0)$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Np.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1+2x)} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin \boxed{3x}}{\boxed{3x}}}_{\to 1} \cdot 3\cancel{x} \cdot \underbrace{\frac{1}{\frac{\ln(1+2x)}{2x}}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{2\cancel{x}} = \frac{3}{2}$$

(jak zobaczymy za chwilę)

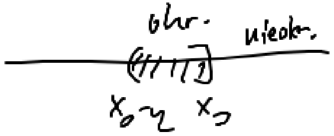
Ciągłość funkcji

Niech $f: D \to \mathbb{R}$, załóżmy, że dla pewnego $\eta > 0$ zachodzi jeden z przypadków:

1) $(x_0-\eta, x_0+\eta) \subset D$

lub

2) $(x_0-\eta, x_0+\eta) \cap D = (x_0-\eta, x_0]$

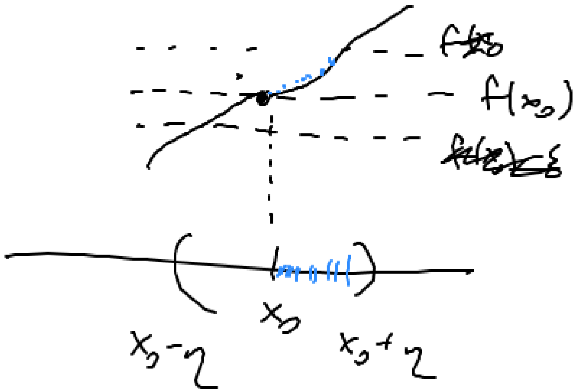


lub

3) $(x_0-\eta, x_0+\eta) \cap D = [x_0, x_0+\eta)$.

Załóżmy, że zachodzi odpowiednio:

ad 1)



(1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

lub

(2) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

lub

(3) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Wówczas mówimy, że funkcja f jest ciągła (cg.) w punkcie $x_0 \in D$.

skrót

Jeśli f jest ciągła w każdym punkcie dziedziny, to mówimy po prostu, że f jest ciągła (cg!)

Fakt.

Funkcje elementarne: wielomiany, sin, cos, f. wykładnicza, f. potęgowa, f. odwrotne do nich są ciągłe.

Tw. Jeśli $f, g : D \to \mathbb{R}$ są ciągłe w punkcie $x_0 \in D$, to $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ też są ciągłe w x_0. Jeśli ponadto $g(x_0) \neq 0$, to $\frac{f}{g}$ też jest cg. w x_0.

Wniosek.

f. wymierne są ciągłe

$tg = \frac{\sin}{\cos}$ jest cg.

Np.

$$\lim_{x \to 0} \sin x = \sin 0$$

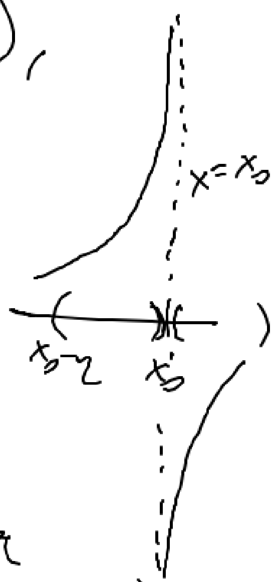
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

Asymptoty

• Jeśli $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\pm\infty$ (tzn. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$ lub $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$),

to mówimy, że f ma w x_0 <u>asymptotę pionową lewostronną</u>

(lub $x=x_0$ jest asymptotą pionową lewostronną)



• Jeśli $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\pm\infty$, to mówimy, że f ma w x_0

<u>asymptotę pionową prawostronną</u>. (lub $x=x_0$ jest asymptotą pionową prawostronną)

• Jeśli f ma w x_0 asymptotę pionową zarówno lewo-, jak i prawostronną,

to mówimy, że f ma w x_0 <u>asymptotę pionową</u> (<u>obustronną</u>).

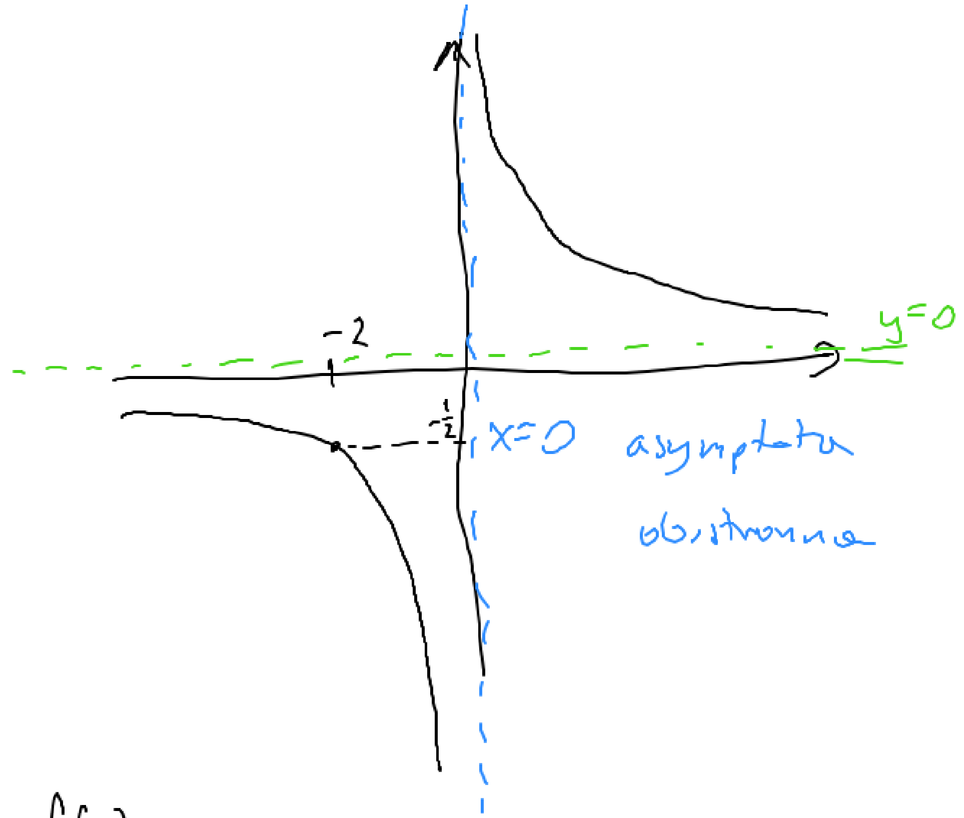
Może być np. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$

Nr 1.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\underset{\downarrow\, 0^-}{x}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\underset{\downarrow\, 0^+}{x}} = \infty$$



Uwaga. $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$, więc $\lim_{x\to 0} f(x)$ <u>nie</u> istnieje.

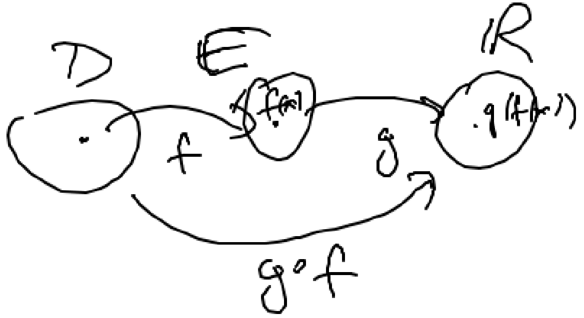
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x} - 0\right) = 0 \qquad \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{x} - 0\right) = 0$$

$\Rightarrow$ $y=0$ jest asymptotą ukośną w ∞ (i też w $-\infty$)

Fakt.

Niech $f: D \to E$, $g: E \to \mathbb{R}$ będą ciągłe.

Wówczas złożenie $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ jest cg.

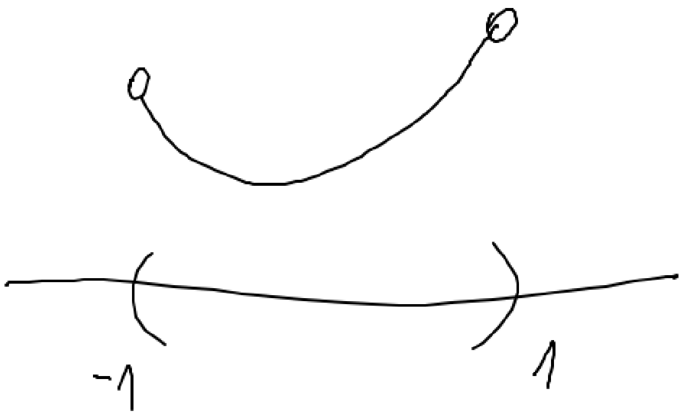


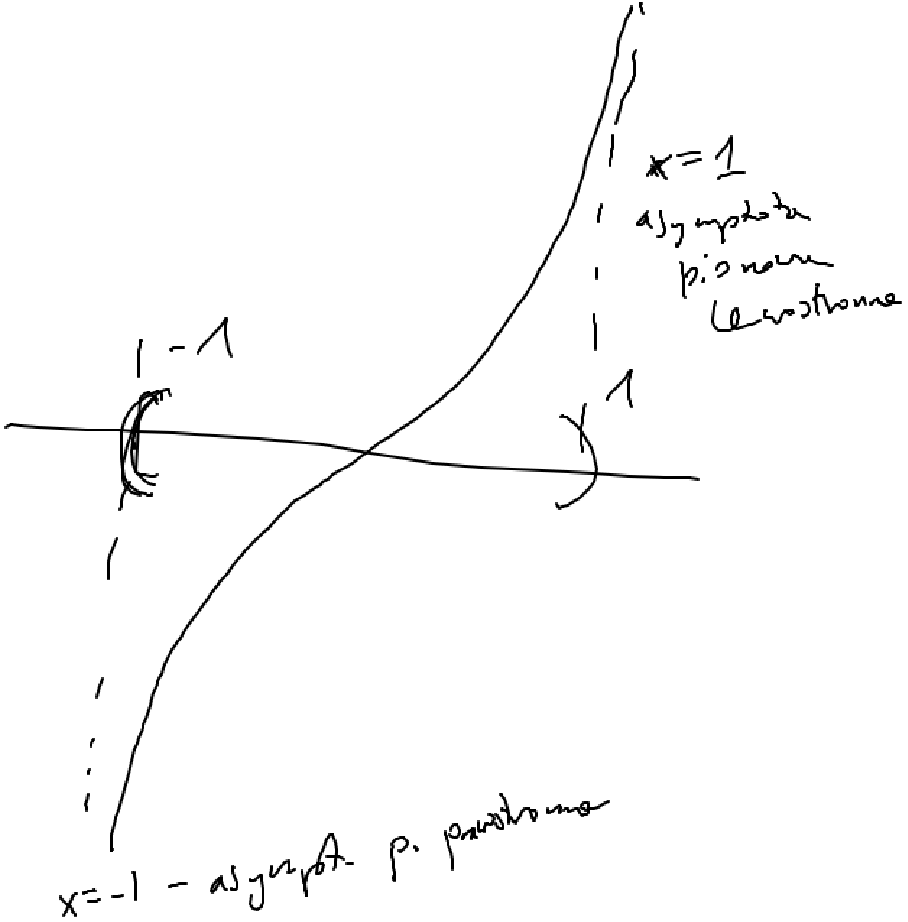
~~Lemat~~. Fakt.

Jeśli f jest ciągła w x_0, to $x = x_0$ nie jest asymptotą pionową f (nawet jednostronną).

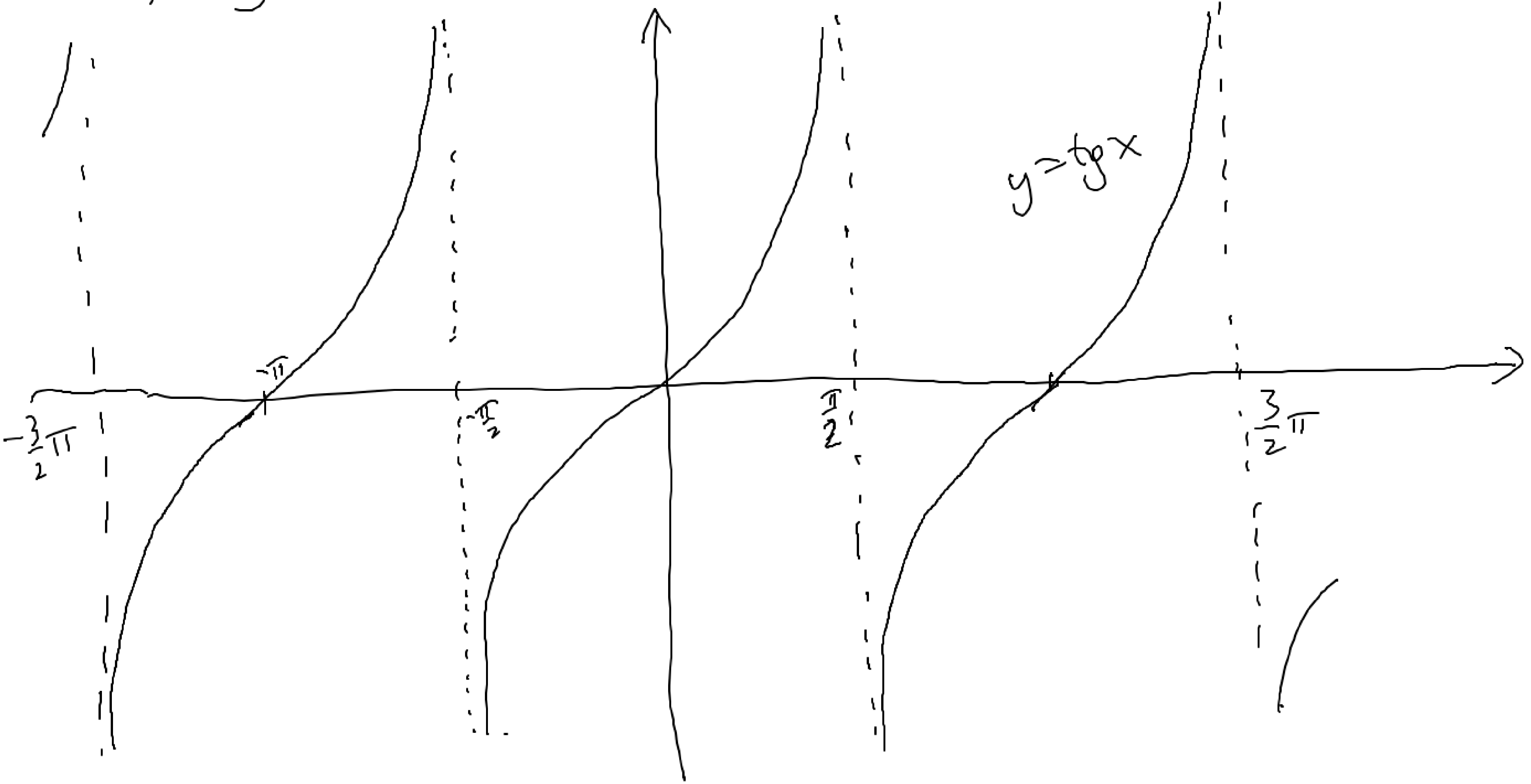
D-d. Jeśli f jest cg. w x_0, to $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (bo i nie jest to granica jednostronna), a więc granice jednostronne nie są równe $\pm\infty$.

Np: jeśli $f: (-1, 1) \to \mathbb{R}$ jest ciąg., to może mieć asymptoty pionowe jedynie jednostronne w -1 lub w 1.





Np: Funkcja tg ma asymptoty pionowe postaci $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (dla $k \in \mathbb{Z}$)



• Mówimy, że $y=ax+b$ jest asymptotą ukośną funkcji f w $+\infty$ (lub $-\infty$), jeśli

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x)-(ax+b)\big)=0$$

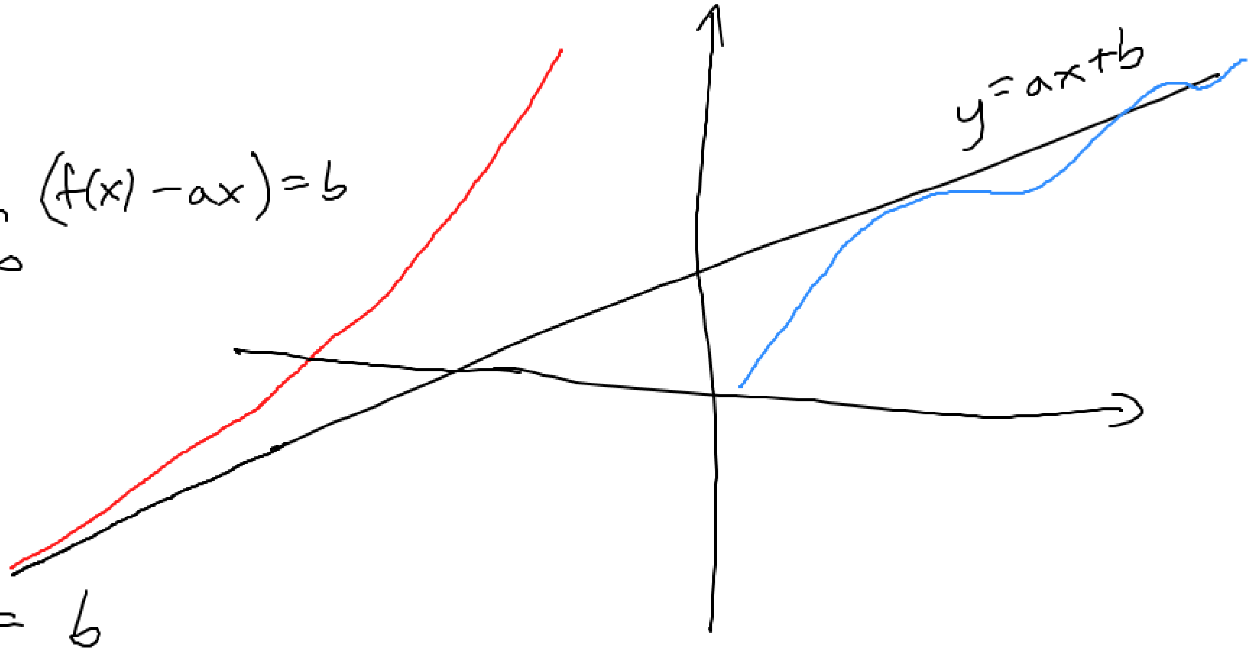
(lub, odpowiednio, $\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-(ax+b)\big)=0$).

<u>Równoważnie</u>,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to\infty}\big(f(x)-ax\big)=b$$

lub – odpowiednio –

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a, \quad \lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-ax\big)=b.$$



(o ile te granice istnieją i są skończone — jeśli nie, to odpowiedniej asymptoty ukośnej nie ma).

Np: Znaleźć asymptoty funkcji

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^3+1}}{x}$$

D_f:

$x^3+1 \geq 0 \qquad x \neq 0$

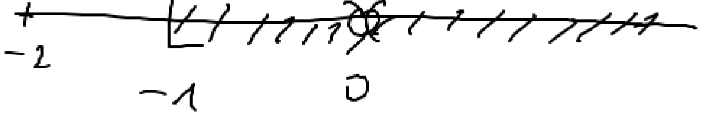
$x^3 \geq -1$

$x \geq -1$

$$D_f = [-1,0) \cup (0,\infty)$$

f jest złożeniem funkcji elementarnych, więc funkcją cg.

Asymptota pionowa może być tylko w 0 (bo to jedyny punkt x_0 spoza dziedziny, w którym granice $\lim\limits_{x\to x_0^{\pm}} f(x)$ mają sens).



Liczymy:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\overset{\to 1}{\sqrt{x^3+1}}}{\underset{\to 0^-}{x}} = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^3+1}}{x} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

$\Rightarrow$ $x=0$ jest as. pionową obustronną.

Asymptota ukośna w ∞:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^3+1}}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^3+1}}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}}{x^2} =$$

(x>0 można zał.)

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\overset{\to 0}{\frac{1}{x^3}}}}{\underbrace{x^{\frac{1}{2}}}_{\infty^{\frac{1}{2}}=\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\sqrt{x^3+1}}{x} - 0\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}}{x^1} =$$

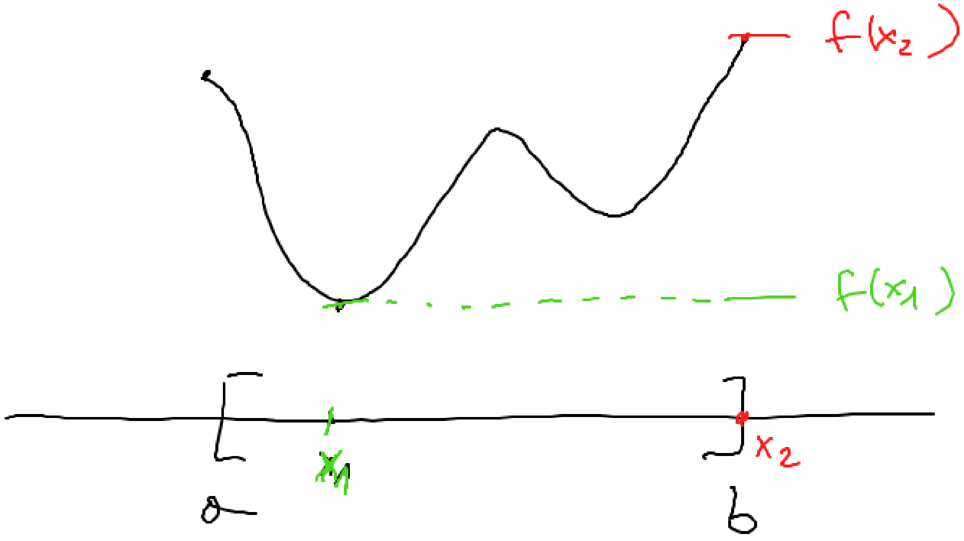
$$= \lim_{x\to\infty} \underbrace{x^{\frac{1}{2}}}_{\to\infty} \cdot \underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}}_{\to 1} = \infty \cdot 1 = \infty$$ $\longrightarrow$ granica istnieje, ale jest nieskończona $\Rightarrow$ nie ma as. uk. w ∞

Odp. Jedyną asymptotą f jest asymptota pionowa obustronna $x=0$.

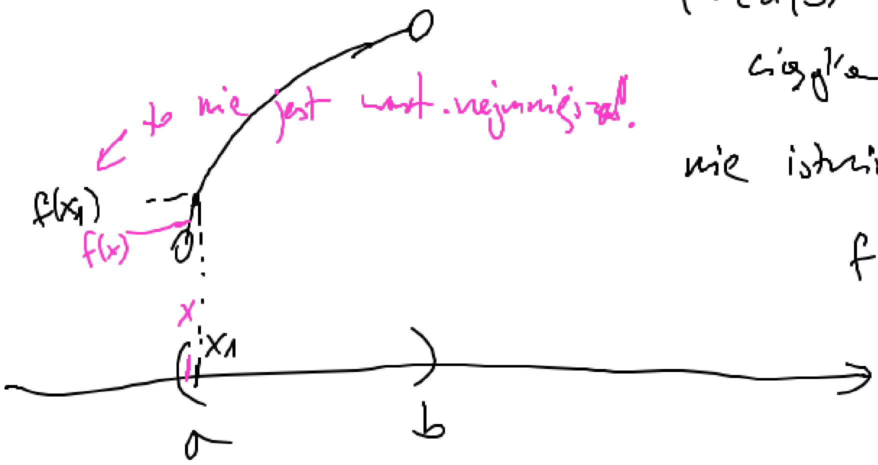
Tw. (Weierstrassa)

Jeśli $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła, to istnieją $x_1, x_2 \in [a,b]$ takie, że

$$\forall_{x\in[a,b]} \quad f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$



Np.



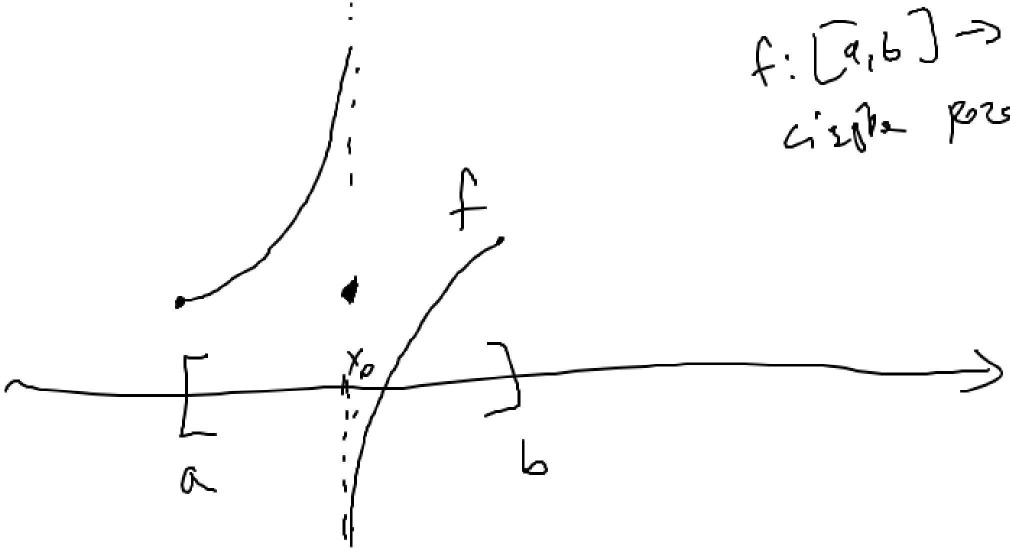
$f: (a,b) \to \mathbb{R}$

ciągła

nie istnieją $x_1, x_2 \in (a,b)$, t. że

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) \quad \forall_{x \in (a,b)}$$

Np.

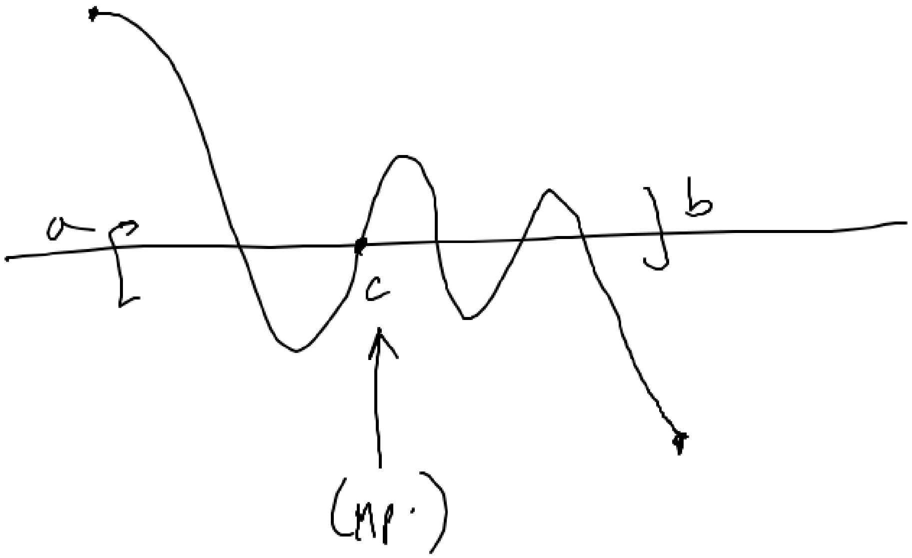


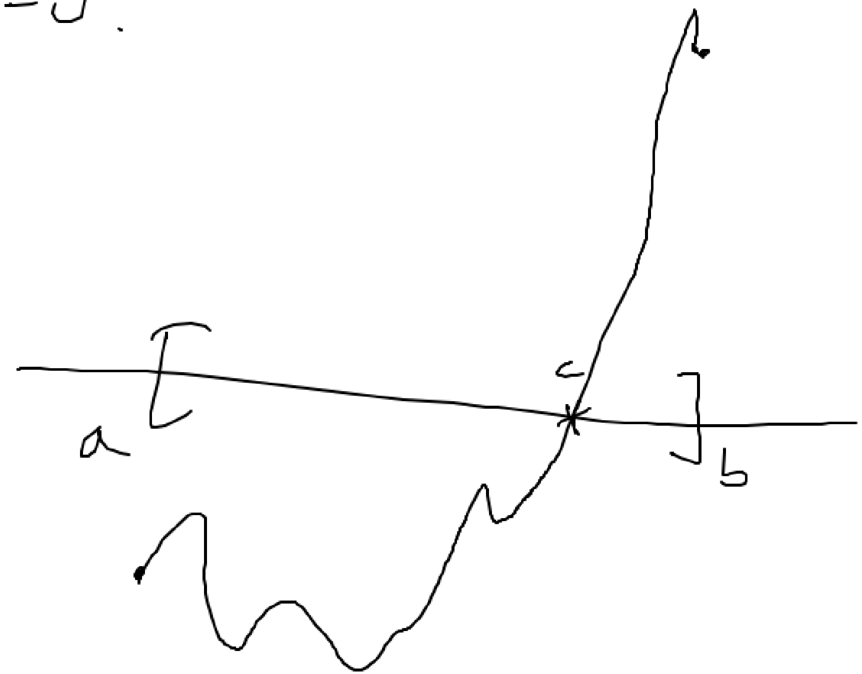
$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

ciągła poza x_0 (na $[a,b] \setminus \{x_0\}$)

Tw. (Darboux)

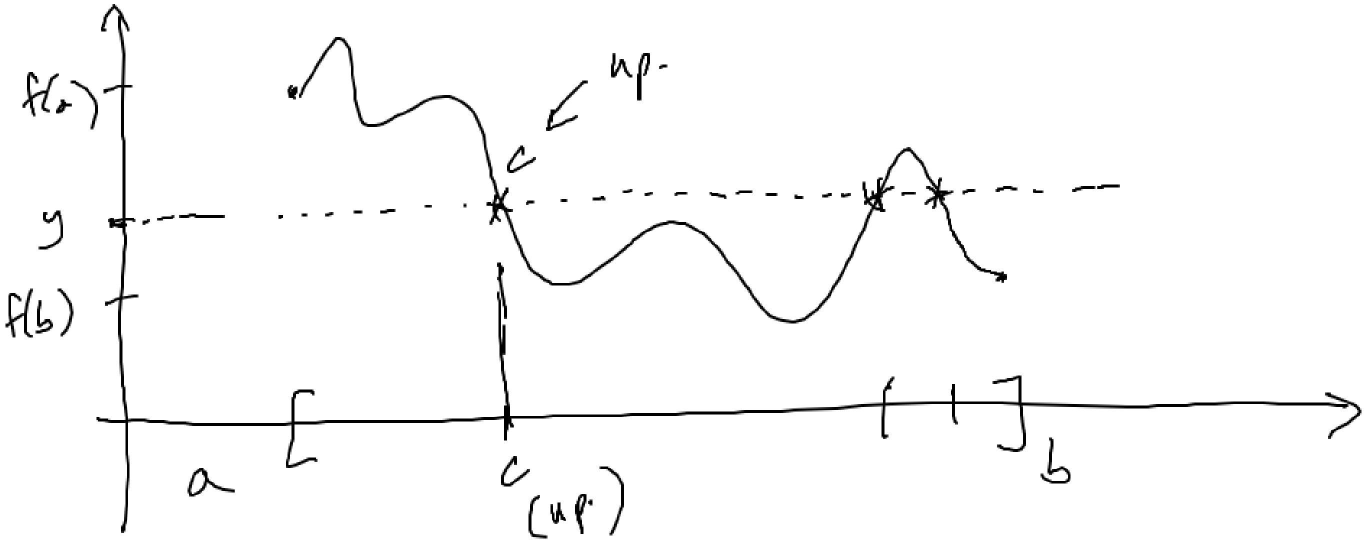
Jeśli $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła oraz $f(a) \cdot f(b) < 0$, to istnieje $c \in (a,b)$ t.że $f(c) = 0$.





Tw. (Darboux)

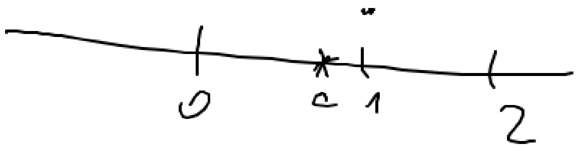
Jeśli $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła, $f(a)\neq f(b)$ oraz $y\in\mathbb{R}$ leży pomiędzy $f(a)$ i $f(b)$, to istnieje $c\in(a,b)$ t. że $f(c)=y$.



$\Big\{$ jeśli $f(a)<f(b)$, to $y\in(f(a),f(b))$,
a jeśli $f(a)>f(b)$, to $y\in(f(b),f(a))$.

Nf: Uzasadnimy, że $f(x) = x - \cos x$ ma miejsce zerowe.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest cg.



$$f(0) = 0 - \cos 0 = -1 < 0$$

$$f(2) = 2 - \cos 2 \geq 2 - 1 = 1 > 0$$

$$f(0) \cdot f(2) < 0$$

Stosujemy tw. Darboux do funkcji $f|_{[0,2]} : [0,2] \to \mathbb{R}$ (jest to dalej f. ciągła).

$\Rightarrow \exists_{c \in (0,2)} : f(c) = 0.$

(Pewnym)
Miejscem zerowym jest 1 ± 1.
(1, z błędem ≤ 1)