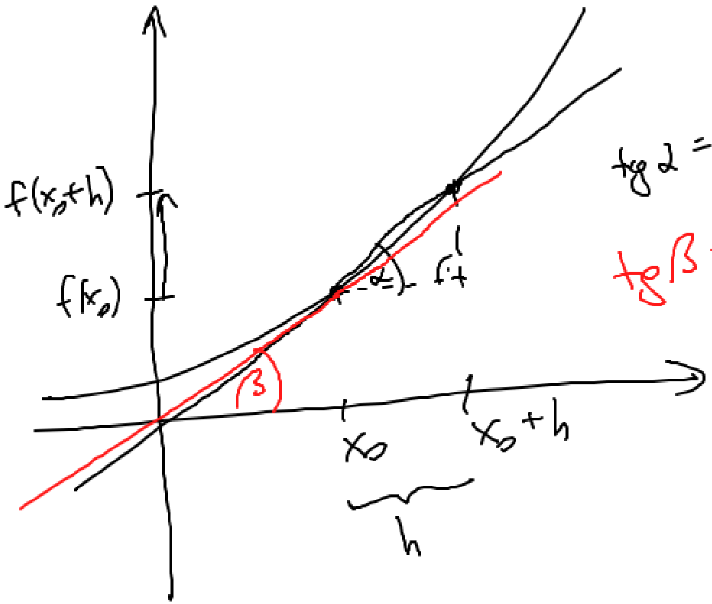
Pochodna funkcji f

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$\operatorname{tg} \beta = f'(x_0)$$

$$\left(x^3 \cdot \cos(x) - \underbrace{x\sqrt{x}}_{x^{\frac{3}{2}}}\right)' = 3x^2 \cdot (\cos(x)) + x^3(-\sin(x)) - x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{3}{2} =$$

$$\left(\frac{\overbrace{e^x \cdot \sin x + 1}^{f}}{\underbrace{x+2}_{g}}\right)' = \frac{\overbrace{(e^x(\sin x) + e^x(\cos x))}^{f'}\overbrace{(x+2)}^{g} -}{\underbrace{(x+2)^2}_{g^2}}$$

$$\frac{\overbrace{(e^x \sin x + 1)}^{f}\ \overbrace{1}^{g'}}{\underbrace{(x+2)^2}_{g^2}}$$

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(f\cdot g)' = f'g + fg'$

$(f-g)' = f' - g'$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(e^x)' = e^x$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{df(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$\{y = g(x)\}$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(x^3+1)' = 3x^2$$

$$(\ln(\underbrace{x^3+1}_{y}))' = (\ln y)' \cdot y' = \frac{1}{y} \cdot 3x^2 = \frac{1}{x^3+1} \cdot 3x^2$$

$\|$

$f(y) = \ln y$

$g(x) = x^3+1$

$g'(x) = 3x^2$

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{1}{x^3+1} \cdot 3x^2$$

$$\left(e^{-\sin^2 x}\right)' = e^{-\sin^2 x} \cdot \left(-\sin^2 x\right)' =$$

$$= e^{-\sin^2 x} \cdot (-2)\sin x \cdot \cos x$$

$(e^x)' = e^x$

$(x^2)' = 2x$

$(\sin x)' = \cos x$

$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$(-f)' = -f'$

$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$

$g(x) = -\sin^2 x$

$(f(g(x)))' = \left(e^{-\sin^2 x}\right)'$

$f'(g(x)) \cdot g'(x) = \underline{e^{-\sin^2 x} \cdot \left(-\sin^2 x\right)'}$

$f_1(x) = x^2 \rightarrow f_1'(x) = 2x$

$g_1(x) = \sin x$

$f_1(g_1(x)) = (\sin x)^2$

$(\sin^2 x)' = f_1'(g_1(x)) \cdot g_1'(x) =$

$= 2\sin x \cdot (\sin x)'$

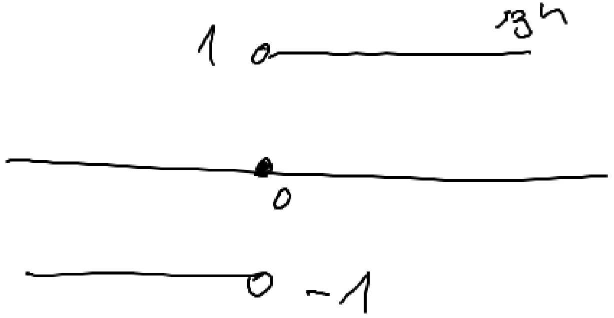
(war. konieczny istnienia pochodnej właściwej)

Tw. Jeśli f ma pochodną właściwą w punkcie x_0, to f jest ciągła w x_0.

(Bez dowodu).

Wniosek.

Np. $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$



nie ma pochodnej właściwej w 0, bo nie jest cg. w 0. $\left(\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1, \ \lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1, \ \operatorname{sgn} 0 = 0\right)$

Tw. Jeśli $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a,b]$, różniczkowalna na (a,b), to

1) jeśli $f'(x) > 0$ dla $x \in (a,b)$, to f jest ściśle rosnąca na $[a,b]$
2) jeśli $f'(x) < 0$ -//- ——— , -//- ——— malejąca na $[a,b]$
3) jeśli $f'(x) \geq 0$ -//- ——— , to f jest słabo rosnąca na $[a,b]$,
4) jeśli $f'(x) \leq 0$ -//- ——— , -//- ——— malejąca na $[a,b]$.

$f(x)$ = położenie cząstki w chwili x

$f'(x) > 0 \to$ prędkość jest > 0

→ wówczas cząstka porusza się na osi w prawo, czyli f jest rosnąca

Nr 1. Znaleźć przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = xe^{-x}$.

Rozw.

$$f'(x) = \left(xe^{-x}\right)' = (x)' \cdot e^{-x} + x \cdot \left(e^{-x}\right)' =$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(e^{y}\right)' = e^{y}$$

$$= 1 \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x} \cdot (-x)' =$$

$$= e^{-x} + xe^{-x} \cdot (-1) = e^{-x}(1-x)$$

f' wszędzie istnieje, f jest ciągła

$$f'(x) < 0 \iff \underbrace{e^{-x}}_{>0}(1-x) < 0 \quad \Big|\cdot e^{x} > 0$$

$$1 - x < 0$$

$$1 < x$$

$$f'(x) < 0 \iff x \in (1, \infty) \qquad f'(1) = 0$$

$$f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, 1)$$

$\Rightarrow$ f jest ściśle malejąca na każdym przedziale $[1, b]$ (gdzie $b > 1$)

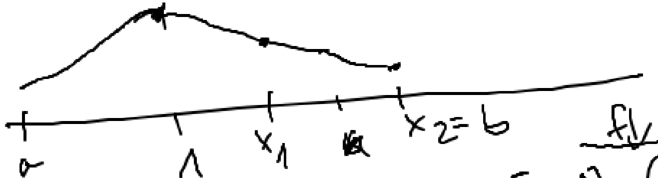
Z dowolności $b > 1$: f jest ściśle malejąca na $[1, \infty) \ni x_1, x_2$

$x_1 < x_2$

$\Downarrow$

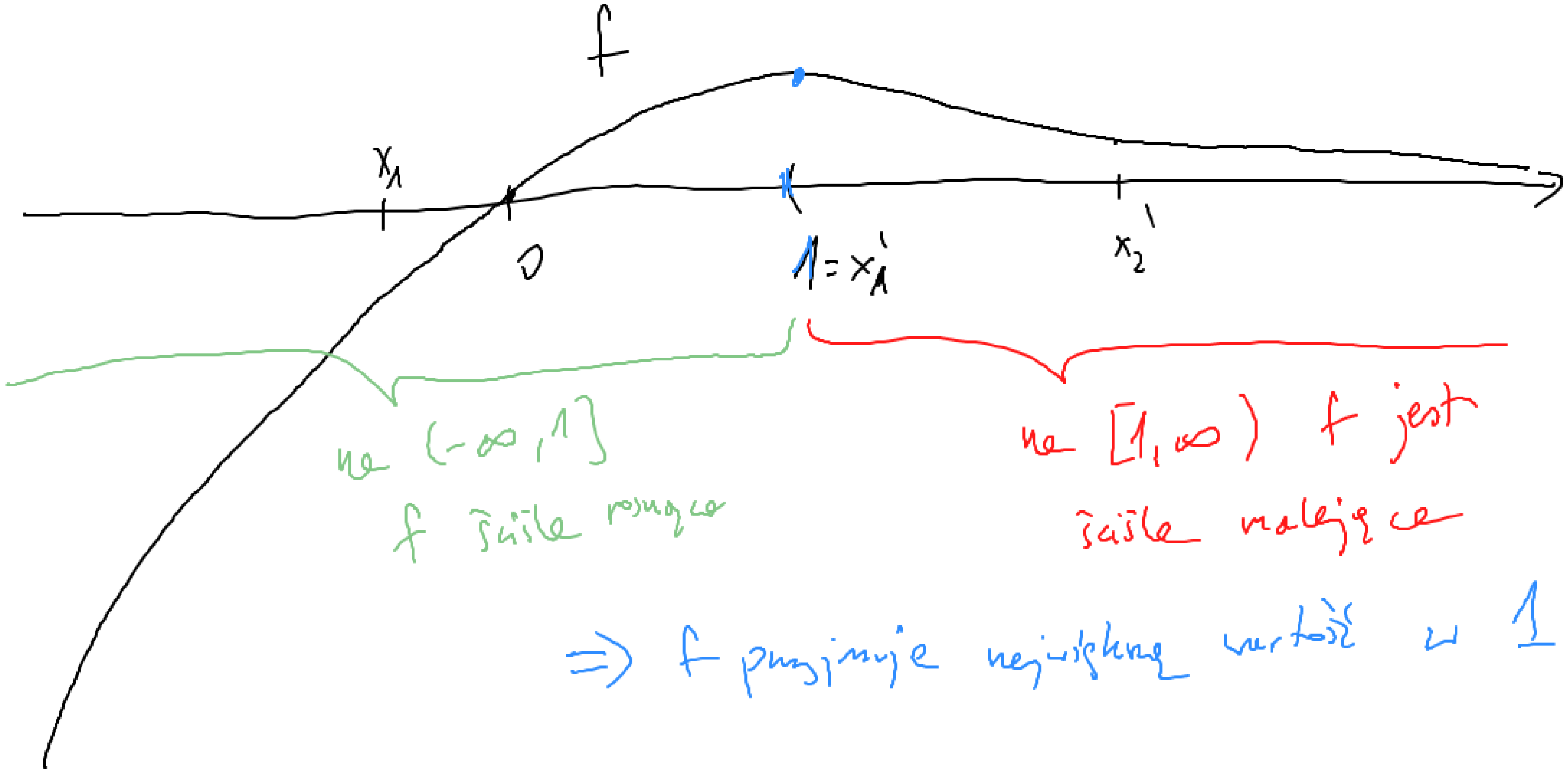
$b := x_2$

$f\downarrow$ $[1, x_2]$



Podobnie f jest ściśle rosnąca na $[a, 1]$ $(a<1)$, więc też na $(-\infty, 1]$

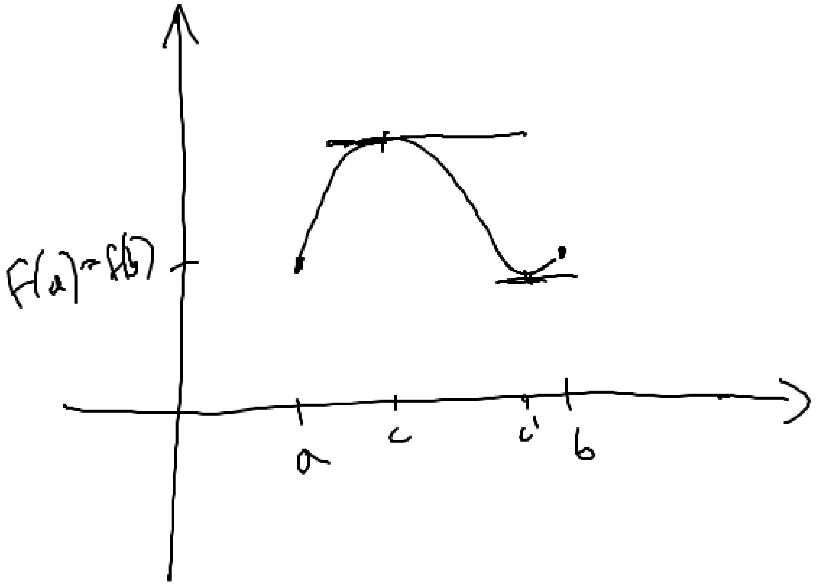
Np. f jest ściśle rosnąca na $(-\infty, 1]$
i ściśle malejąca na $[1, \infty)$.



$\Rightarrow$ f przyjmuje największą wartość w $\underline{1}$

Tw. (Rolle'a)

Niech $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na (a,b), $f(a)=f(b)$.
Wówczas istnieje $c \in (a,b)$ t.że $f'(c)=0$.

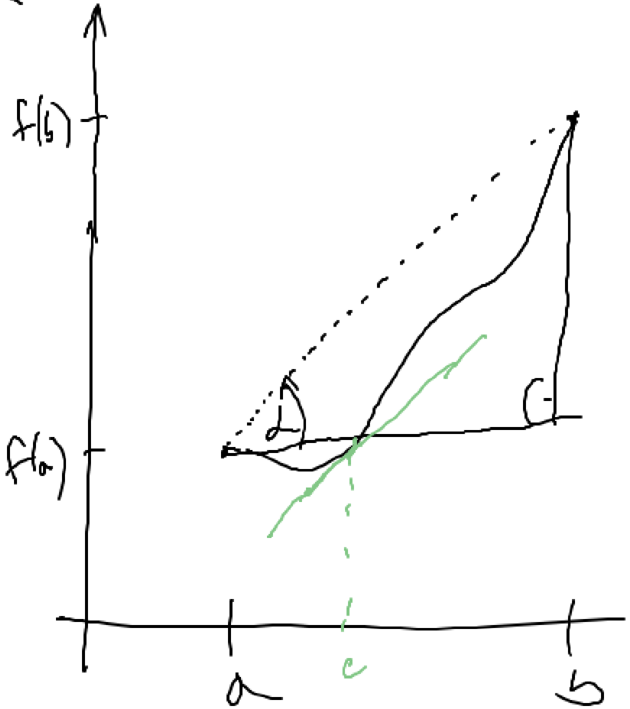


$f(x)$ = położenie cząstki w chwili x

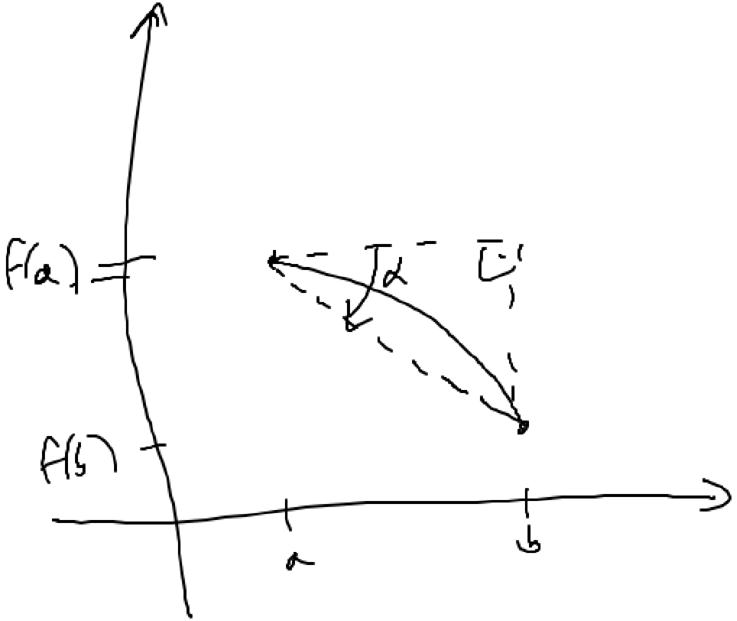
$f(a)=f(b) \to$ w chwili początkowej i końcowej cząstka jest w tym samym miejscu

Tw. (Lagrange'a)

Niech $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na (a,b).
Wówczas istnieje $c \in (a,b)$ takie, że $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Tw. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ cg. na $[a,b]$, różniczkowalna na (a,b), oraz $f'(x)>0$ dla $x\in(a,b)$. Wtedy f jest ściśle rosnąca na $[a,b]$.

f jest ściśle rosnąca na $[a,b]$ oznacza, że $\forall x_1,x_2\in[a,b]\ (x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2))$

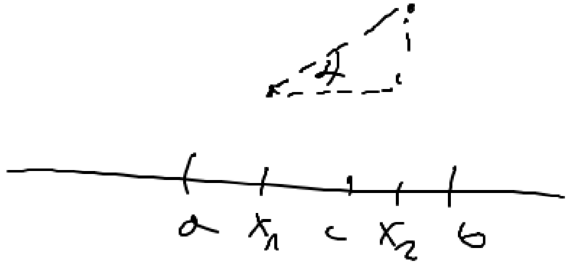
Dd.

Niech $x_1,x_2\in[a,b]$, $x_1<x_2$ — dowolne.

Zastosujmy tw. Lagrange'a do f i odcinka $[x_1,x_2]$:

istnieje $c\in(x_1,x_2)$ t.że

$$f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$



$\operatorname{tg}\alpha = f'(c)>0$

Ale $f'(c)>0$, czyli

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0 \quad \Big|\cdot(x_2-x_1)>0$$

$$f(x_2)-f(x_1)>0$$

$$f(x_2)>f(x_1)$$

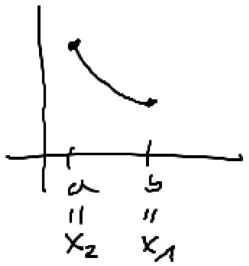
∎

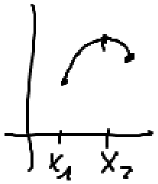
Niech $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ będzie ciągła.

Z tw. Weierstrassa istnieją $x_1, x_2 \in [a,b]$ takie, że

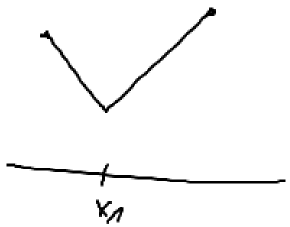
$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) \quad \text{dla} \quad x\in[a,b]$$

· Może się zdarzyć, że ~~x~~ $x_1\in\{a,b\}$ lub $\underbrace{x_2\in\{a,b\}}_{(x_2=a \text{ lub } x_2=b)}$

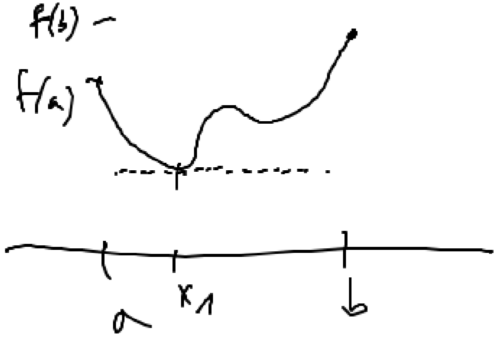




· Jeśli np. $x_1\in(a,b)$, to może się zdarzyć, że $f'(x_1)$ nie istnieje.



Jeśli jednak $x_1\in(a,b)$ oraz $f'(x_1)$ istnieje, to $f'(x_1)=0$.



(I podobnie dla x_2).

Innymi słowy, jeśli $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ - ciągła przyjmuje w punkcie $x_1 \in [a,b]$ wartość najmniejszą (tzn. $f(x_1) \le f(x)$ dla $x \in [a,b]$), to wtedy:

- $x_1 = a$ lub $x_1 = b$

lub

- $f'(x_1)$ nie istnieje

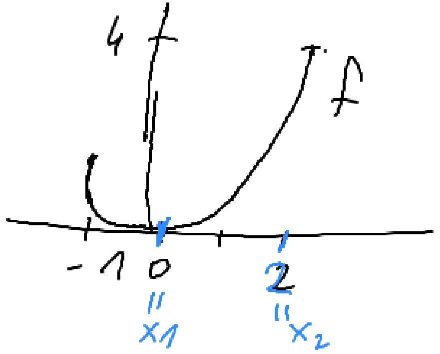
lub

- $f'(x_1) = 0$.

Nr 1. Znaleźć wartość najmniejszą i największą funkcji $f(x) = x^2$ na $[-1,2]$.

Rozw. (korzystając z pow. obserwacji)

Po pierwsze, skoro f jest cg. (jako f. elementarna), to przyjmuje wartość najmniejszą w pewnym punkcie $x_1 \in [-1,2]$ oraz przyjmuje wartość największą —||— ——— $x_2 \in [-1,2]$.



Policzmy pochodną: $f'(x) = (x^2)' = 2x$ (wszędzie istnieje ↑ na $(-1,2)$)

Zbadajmy, kiedy $f'(x) = 0$: $2x = 0$

$x = 0$

Punkty krańcowe odcinka: $-1, 2$.

Punkty wewn. (z $(-1,2)$), w których pochodna nie istnieje: brak

— || — pochodna jest zero: 0

Z obserwacji: wynika, że $x_1, x_2 \in \{-1, 0, 2\}$.

Policzmy: $f(-1) = (-1)^2 = 1$

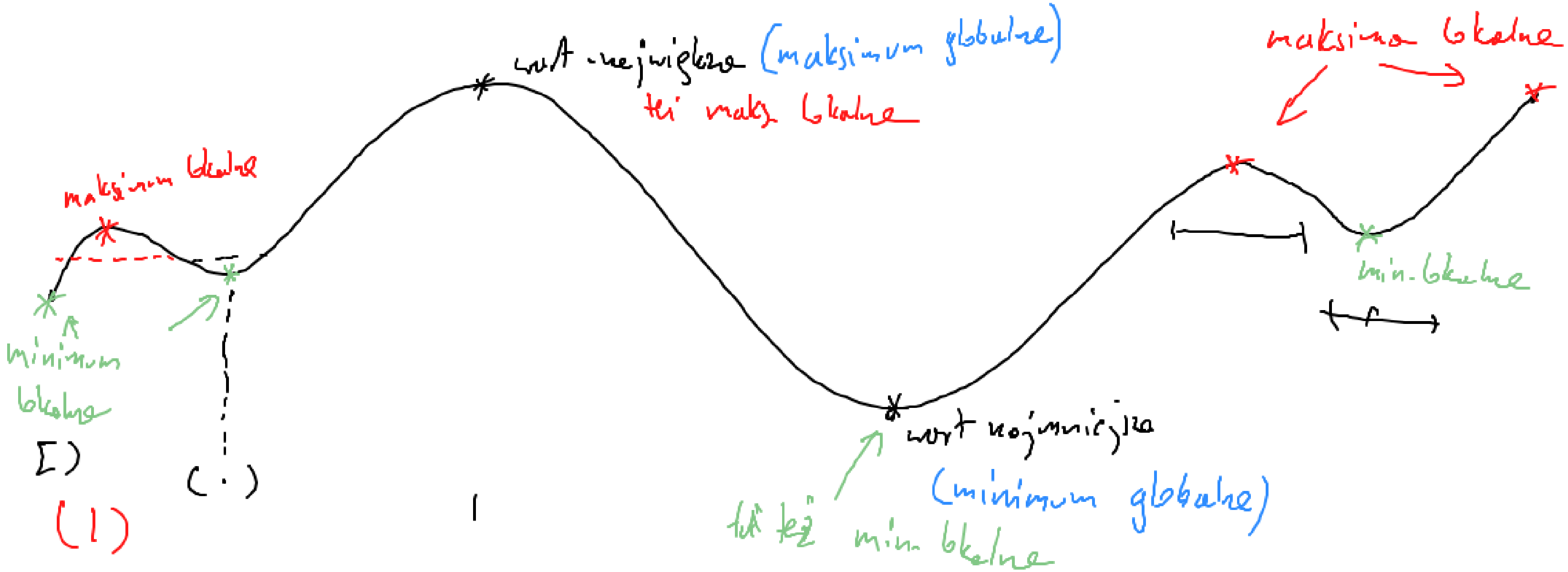
$f(0) = 0^2 = 0$

$f(2) = 2^2 = 4$

$\Rightarrow$ w 0 f ma wartość najmniejszą

w 2 — || — największą.

$\boxtimes$



<u>Fakt.</u> Jeśli $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła i ma minimum (lub maksimum) lokalne w jakimś punkcie $x\in[a,b]$, to:

- $x=a$ lub $x=b$

lub
- $f'(x)$ nie istnieje

lub
- $f'(x)=0$.

Def.

Jeśli $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ i $x_0\in[a,b]$, to mówimy, że:

- f ma maksimum lokalne w x_0, jeśli istnieje $\eta>0$ takie, że

$$f(x_0)\geq f(x) \quad \text{dla} \quad x\in[a,b]\cap(x_0-\eta, x_0+\eta)$$

- f ma minimum lokalne w x_0, jeśli istnieje $\eta>0$ takie, że

$$f(x_0)\leq f(x) \quad \text{dla} \quad x\in[a,b]\cap(x_0-\eta, x_0+\eta).$$

- f ma ekstremum lokalne w x_0, jeśli ma w x_0 minimum lokalne lub maksimum lokalne.