· Obliczmy $f'(x)$, jeśli $h(x) = x^x$. $(x>0)$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$\cancel{(a^x)'}$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(a^x)' = \left(\left(e^{\ln a}\right)^x\right)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a$$

$(a>0)$

$f(y) = e^y \quad f'(y) = e^y \qquad f(y(x))' = f'(y(x)) \cdot y'(x)$

$y(x) = x \cdot \ln a$

$y'(x) = \ln a$

$$h'(x) = (x^x)' = \left(\left(e^{\ln x}\right)^x\right)' = \left(e^{x \ln x}\right)' = e^{x \ln x} \cdot (x \cdot \ln x)' =$$

$$= \underbrace{e^{x \ln x}}_{x^x}\left(x' \cdot \ln x + x\,(\ln x)'\right) = x^x\left(\ln x + x\,\frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1)$$

$a = e^{\ln a} \quad (a>0)$

Przypomnijmy, że (jeśli $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła i ma ekstremum lokalne w punkcie $x_0 \in [a,b]$, to:

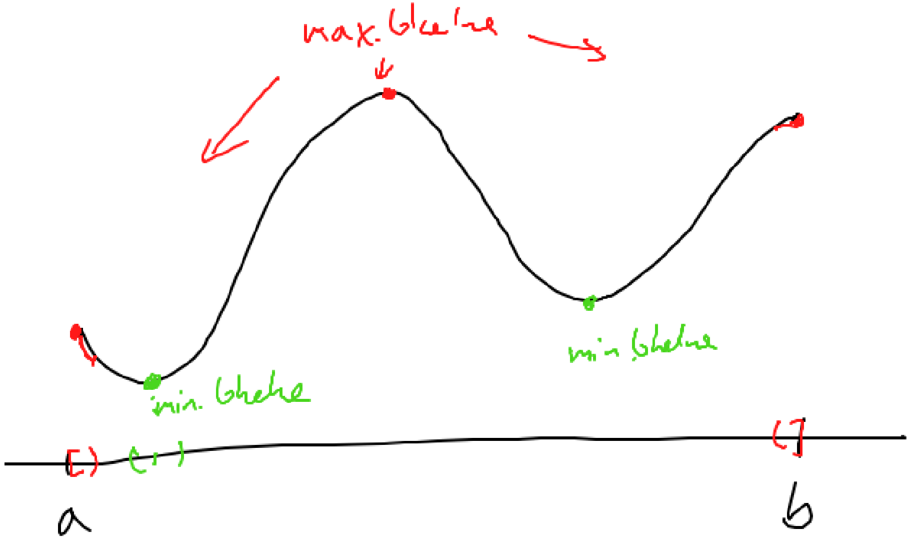
1) $x_0 = a$ lub $x_0 = b$

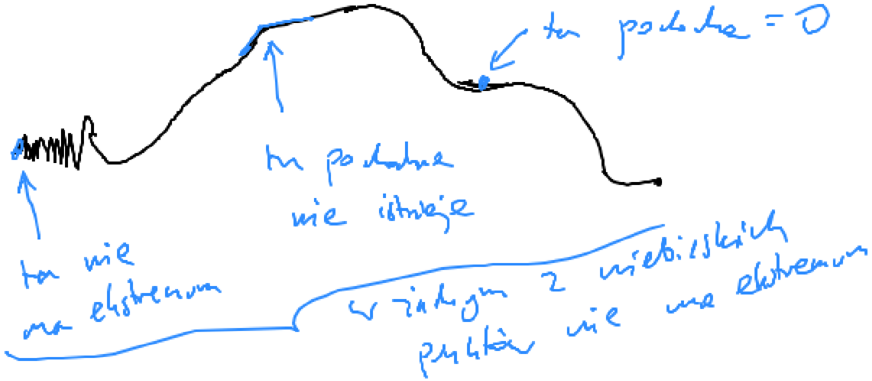
lub

2) $f'(x_0)$ nie istnieje

lub

3) $f'(x_0) = 0$





Tw. Jeśli $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest ciągła, $x_0\in(a,b)$ oraz istnieje $\eta>0$ takie, że

1) $f'(x)>0$ dla $x\in(x_0-\eta,x_0)$ oraz $f'(x)<0$ dla $x\in(x_0,x_0+\eta)$

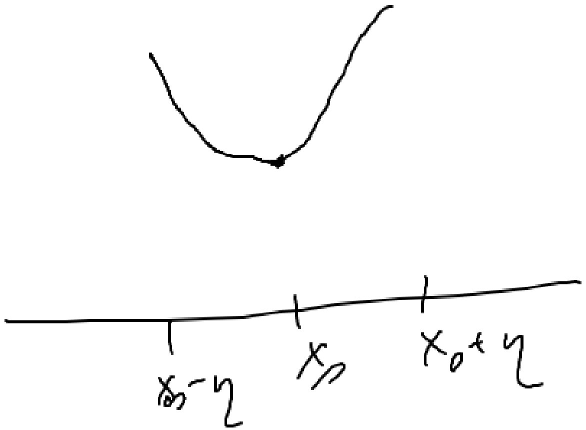
lub

2) $f'(x)<0$ -||- ———— —— $f'(x)>0$ -||- ————,

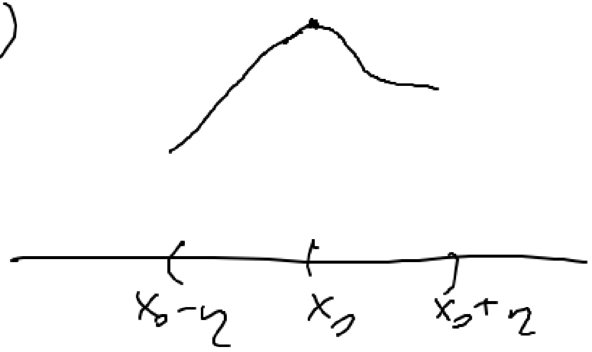
to w punkcie x_0 funkcja f ma ekstremum lokalne.

~~Jeśli~~ W przypadku 1) jest to maksimum lokalne, a w przypadku 2) — minimum lokalne.

2)



1)



Tw. Jeśli $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ jest ciągła oraz dla pewnej $\eta>0$ zachodzi:

1) $f'(x)>0$ dla $x\in(a,a+\eta)$

lub

2) $f'(x)<0$ dla $x\in(a,a+\eta)$

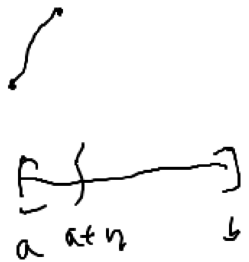
1') $f'(x)<0$ dla $x\in(b-\eta,b)$

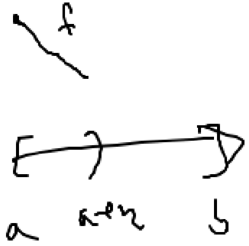
lub

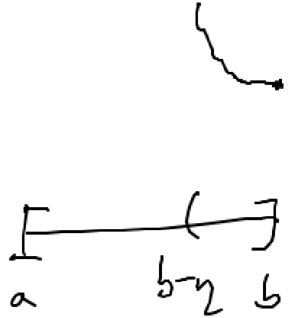
2') $f'(x)>0$ dla $x\in(b-\eta,b)$

to w przypadkach 1), 2) — f ma ekstremum lokalne w a (w 1) – min. lok., 2) – max. lok.),

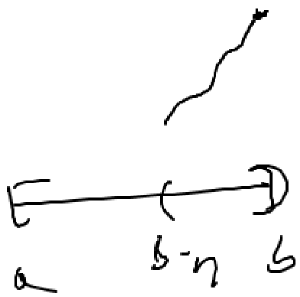
a w przypadkach 1'), 2') — f ma ekstremum lokalne w b (w 1') min. lok., 2) – max. lok.)

1)


2)


1')


max lok.

2')


Wf: Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne $f(x)=xe^{-x^2+x}$ na odcinku $[-3,3]$.

- f jest ciągła $\qquad (fg)' = f'g + fg'$
- policzmy f' na $(-3,3)$:

$$f'(x) = (x)' e^{-x^2+x} + x\cdot \left(e^{-x^2+x}\right)' = 1\cdot e^{-x^2+x} + x\cdot e^{-x^2+x}\cdot(-x^2+x)' =$$

$f(y) = e^y \quad f'(y)=e^y \quad f(y(x))' = f'(y(x))\cdot y'(x)$

$y(x) = -x^2+x$

$$= e^{-x^2+x} + x e^{-x^2+x}\cdot(-2x+1) = e^{-x^2+x}\left(1+x-2x^2\right)$$

· Sprawdźmy, dla jakich x $f'(x)>0$:

$$f'(x)=e^{-x^2+x}\left(1+x-2x^2\right)>0 \quad \Big|\cdot e^{x^2-x}>0$$

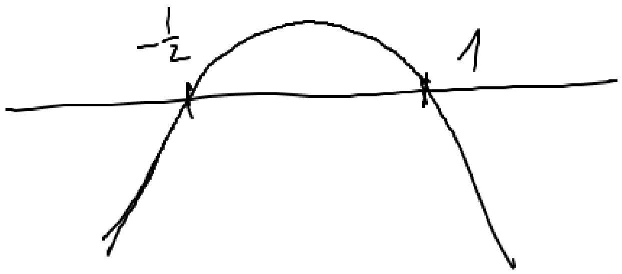
$$1+x-2x^2>0$$

$$\Delta=1+8=9 \qquad x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{-4}; \qquad x_1=\frac{-1+3}{-4}=\frac{-1}{2}, \quad x_2=\frac{-1-3}{-4}=1$$

Czyli $f'(x)>0$ dla $x\in\left(-\frac{1}{2},1\right)$

$f'(x)<0$ dla $x<-\frac{1}{2}$ lub $x>1$

$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=f'(1)=0$.



$\Rightarrow$ f jest ściśle malejąca na $\left[-3,-\frac{1}{2}\right]$

ściśle rosnąca na $\left[-\frac{1}{2},1\right]$

ściśle malejąca na $[1,3]$

-3	$\left[-3,-\frac{1}{2}\right]$	$-\frac{1}{2}$	$\left[-\frac{1}{2},1\right]$	1	$[1,3]$	3
max lok.	↘	min lok.	↗	max lok.	↘	min lok.

Odp: 4 ekstrema lokalne: w $-3, -\frac{1}{2}, 1, 3$.

Jakie są ekstrema lokalne $f(x) = x e^{-x^2+x}$ na $\mathbb{R}$?

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

{ podobnie byłoby np. na $[-3, 3]$

Taki rachunek jak przed chwilą pokazuje, że:

$f \searrow$ na $(-\infty, -\frac{1}{2}]$

$f \nearrow$ na $[-\frac{1}{2}, 1]$

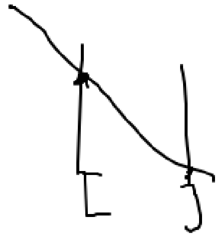
$f \searrow$ na $[1, \infty)$

$f' < 0$ na $(-\infty, -\frac{1}{2})$

$f' > 0$ na $(-\frac{1}{2}, 1)$

$f' < 0$ na $(1, \infty)$

$(-\infty, -\frac{1}{2}]$	$-\frac{1}{2}$	$[-\frac{1}{2}, 1]$	1	$[1, \infty)$
$\searrow$	min. lok.	$\nearrow$	max. lok.	$\searrow$



$\to$ f ma 2 ekstrema lokalne, w $-\frac{1}{2}$ i w 1.

Uwaga.

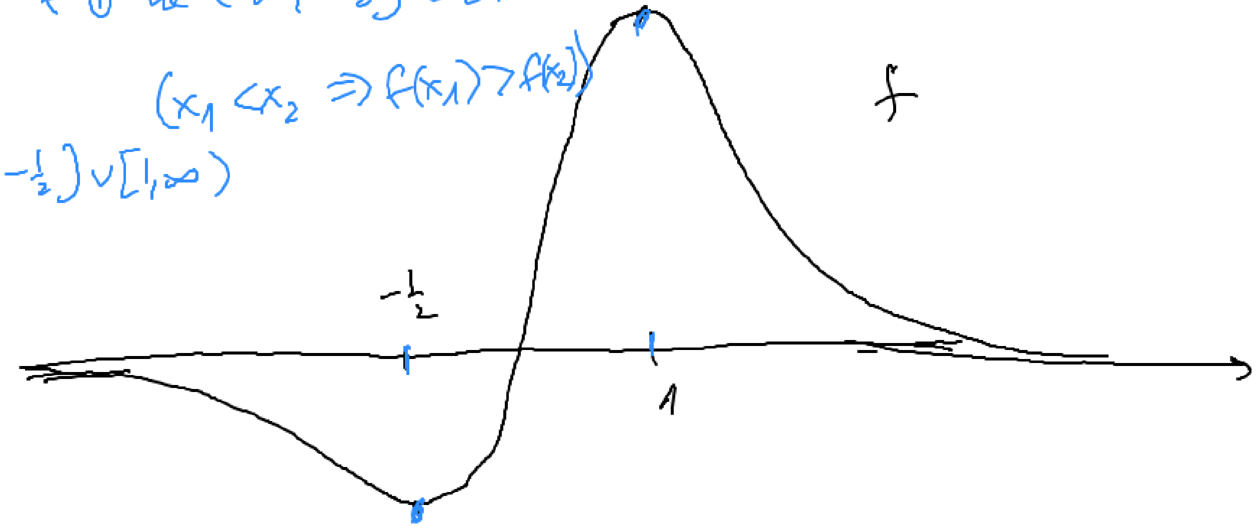
f jest malejąca na $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ i na $[1, \infty)$, ale nie jest malejąca na $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [1, \infty)$!

→ np. dlatego, że $f(-\frac{1}{2}) < 0 < f(1)$

Co to znaczy, że $f \downarrow$ na $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [1, \infty)$?

Tzn. że

$\forall x_1, x_2 \in (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [1, \infty)$ $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$



$-\frac{1}{2} < 1$ oraz $f(-\frac{1}{2}) < f(1)$

x_1 $\quad$ x_2

Równanie stycznej do wykresu funkcji

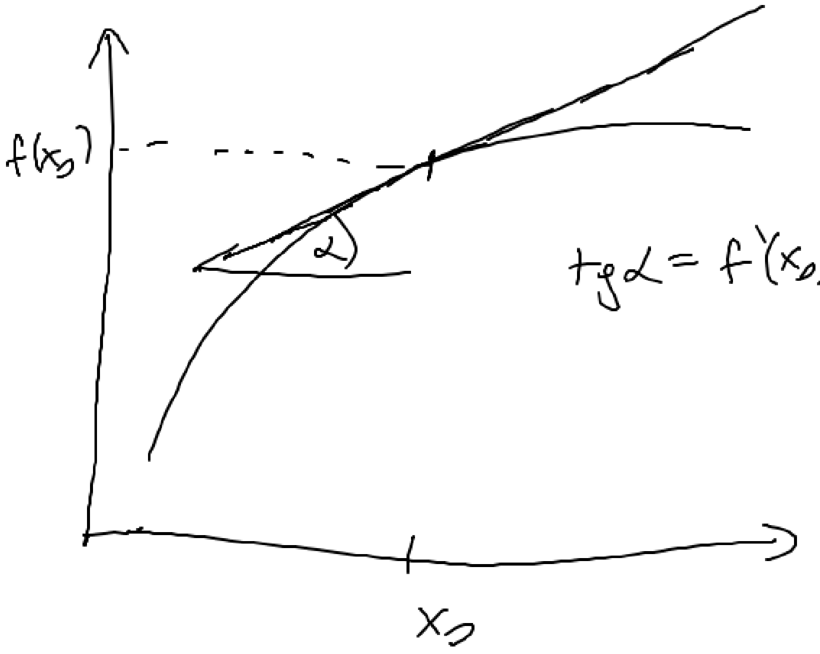
Niech $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $f'(x_0)$ istnieje i jest skończone dla pewnego $x_0 \in \mathbb{R}$

Prosta styczna do wykresu f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest dane równaniem:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

lub

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$



$\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$

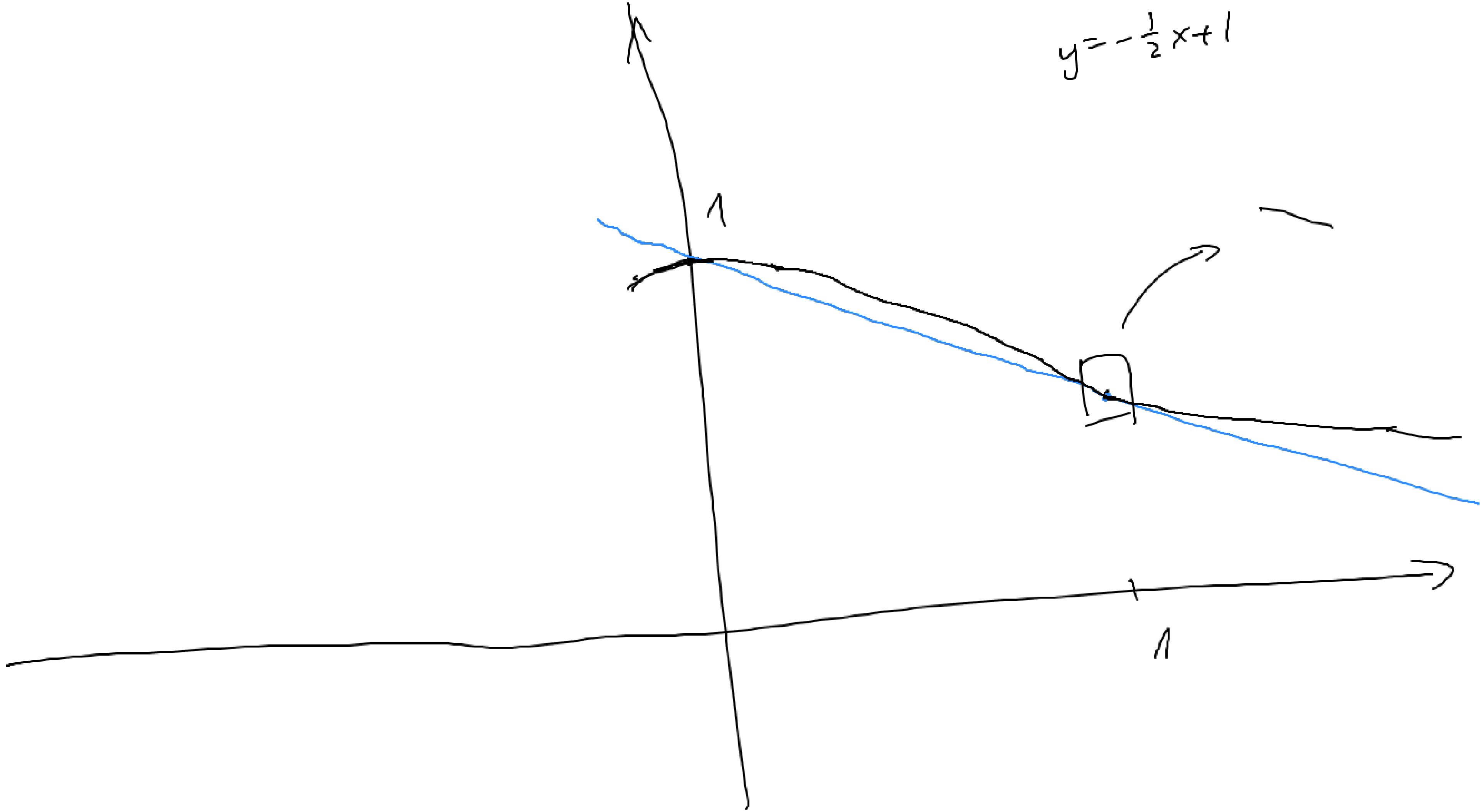
Np.

Zadanie: Wyznaczyć równanie prostej stycznej do wykresu $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ w punkcie $(1, f(1))$. [lub: w punkcie 1].

Rozw.
$$f'(x) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{(1)'\cdot(1+x^2) - 1\cdot(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} =$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$
$$= \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$
;
$x_0 = 1$, $f(x_0) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$,

$f'(x_0) = f'(1) = \frac{-2}{2^2} = -\frac{1}{2}$

r-nie stycznej:
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$
$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x-1)$$
$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$
$$\boxed{y = -\frac{1}{2}x + 1}$$



$y = -\frac{1}{2}x + 1$
1
1

Nr 1. Znaleźć r-nie prostej stycznej do wykresu $f(x)=x^3$ w $x=0$.

$x_0=0$ $\quad f(x_0)=0$ $\quad f'(x)=3x^2$

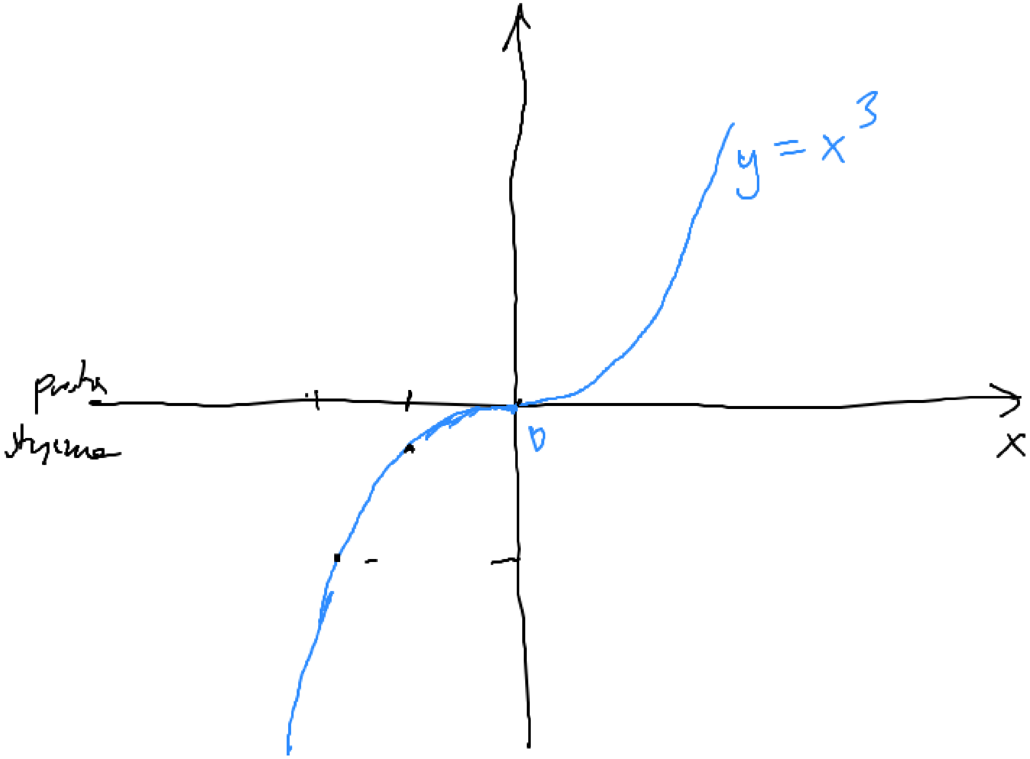
$f'(x_0)=f'(0)=0$

r-nie stycznej:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

$$y-0=0\cdot(x-0)$$

$$\boxed{y=0}$$



Uwaga: $f'(0)=0$, ale f nie ma ekstremum lokalnego w $x=0$.

Reguła de l'Hôspitala

Załóżmy, że $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$, istnieją pochodne f', g' na (a,b) oraz

1) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = 0$ oraz $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$

lub

2) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ oraz $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty$ [4 przypadki]

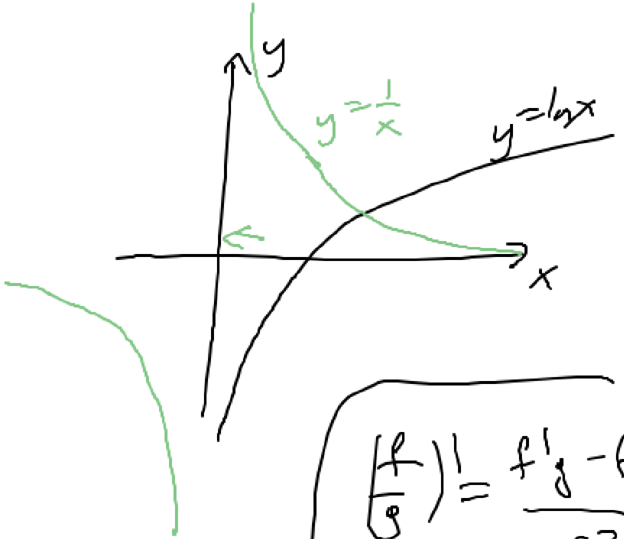
Ponadto załóżmy, że istnieje granica $g = \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Wtedy istnieje

granica $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ i jest równa g.

Można zastąpić powyżej wszystkie symbole „$x\to a^+$" przez „$x \to b^-$" lub „$x\to x_0$" i twierdzenie pozostanie prawdziwe. (Tutaj $x_0 \in (a,b)$).

Np. Oblicz

(*) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\overset{\to -\infty}{\ln x}}{\underset{\to +\infty}{\frac{1}{x}}}$



Spróbujmy obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$

$\boxed{\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}\cdot(-x^2) = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x) = 0.$

$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' =$

$= -1\cdot x^{-1-1} = \dfrac{-1}{x^2}$

Z reguły de L'Hôspitale wynika, że szukana granica (*) istnieje i równa się 0.

Zwykle zapisujemy taki rachunek następująco:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\left[\frac{-\infty}{\infty}\right]}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \dots = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

należy rozumieć tak: jeśli na końcu okaże się, że granica po prawej istnieje, to tutaj istotnie jest równość

Jeśli natomiast granica po prawej nie istnieje, to o granicy po lewej nie możemy nic powiedzieć.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \left(\underset{\underset{0}{\downarrow}}{x}\cdot \underset{\underset{-\infty}{\downarrow}}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x \to 0}{\underset{\underset{0}{\downarrow}}{\frac{1}{\ln x}}}$$

Reguła de l'Hôspitala dla granic w $\pm\infty$:

Niech $f, g : (a, \infty) \to \mathbb{R}$, ~~bę~~ dz różniczkowalne, przy czym

1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$

lub

2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \pm\infty$ [4 przypadki].

Jeśli istnieje granica $g = \lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ x\to-\infty}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, to istnieje też granica

$\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ x\to-\infty}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ i równa się g.

$f, g : (-\infty, b) \to \mathbb{R}$

1') $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

lub

2') $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \pm\infty$

Na zielono:

Modyfikacja dla granicy w $-\infty$.

Пр.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\underset{\infty}{x}\cdot\underset{0}{e^{-x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x}}\underset{H}{\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{(x)'}{(e^{x})'}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{x}}=\frac{1}{\infty}=0.$$

Отв. 0.