Przykład

Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ i określić ich rodzaj.

Rozw.

$$f'(x) = (x^3)' - 3(x^2)' - 9(x)' + 0 =$$
$$= 3x^2 - 3\cdot 2x - 9 = 3x^2 - 6x - 9 =$$
$$= 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x-3)(x+1)$$

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$n=3$

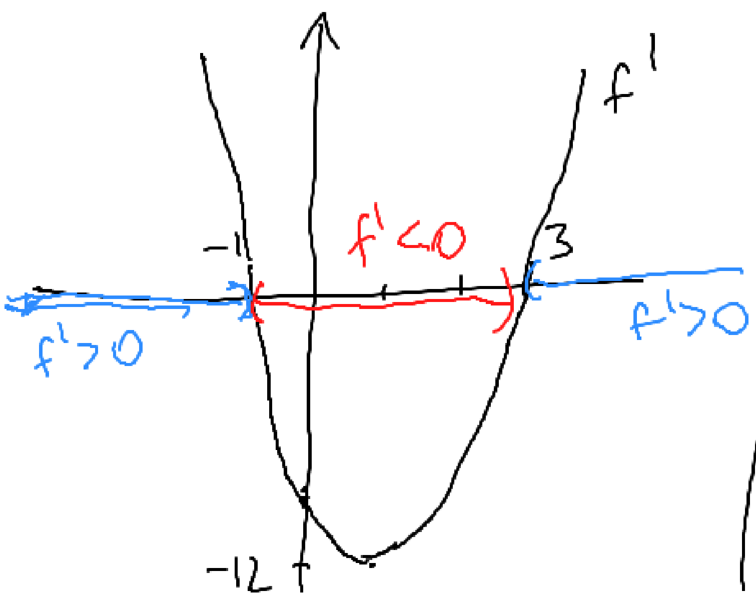
$(x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2$

$n=2$

$(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x$

$f(-1) = -1 - 3 + 9 + 5$

$f(3) = 27 - 27 - 27 + 5 = -22$



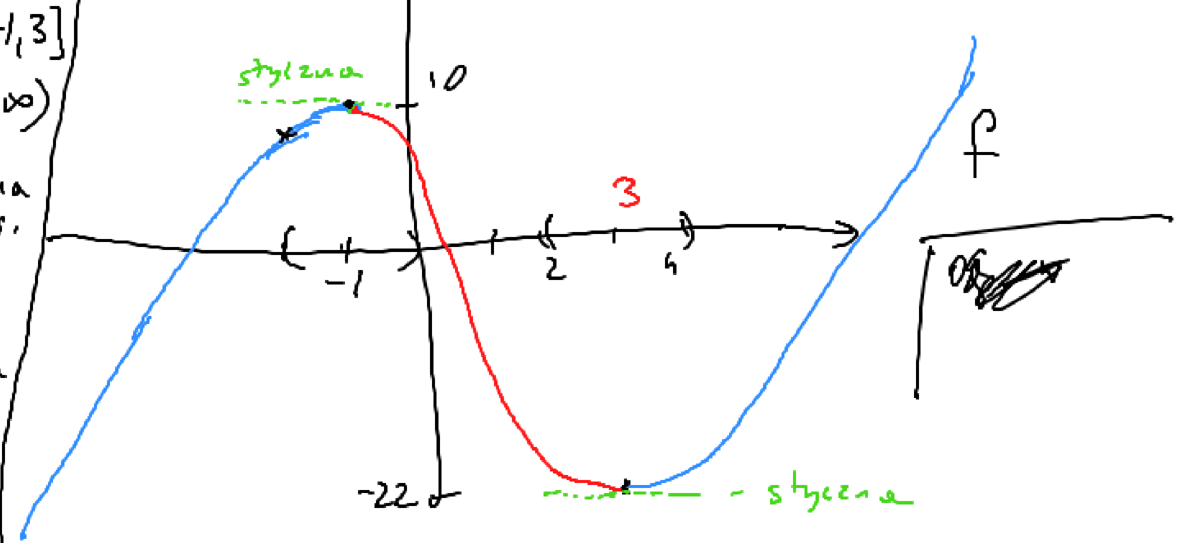
f ↗ na $(-\infty, -1]$

f ↘ na $[-1, 3]$

f ↗ na $[3, \infty)$

Odp. f ma w -1 maks. lok.

w 3 f ma min. lokalne



Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x)=\ln(x^2)$.

$$D_f = \{x:\ x^2>0\} = (-\infty,0)\cup(0,\infty)$$

Uwaga. $\ln(x^2) \neq 2\ln x$ tutaj

Ale $\ln(x^2)=2\ln x$ dla $x>0$.

$$\ln(x^2)=\ln((-x)^2)=2\ln(-x)=$$
$$=2\ln|x|$$
$x<0$

Liczymy pochodną:

$$f'(x)=\left(\ln(x^2)\right)'=\frac{1}{x^2}\cdot(x^2)'=\frac{1}{x^2}\cdot 2x=\frac{2}{x}$$

$$(\ln(x))'=\frac{1}{x}$$

$$f(y)=\ln y$$
$$y(x)=x^2$$
$$\left(\ln(x^2)\right)'=\left(f(y(x))\right)'=f'(y(x))\cdot y'(x)=\frac{1}{y(x)}\cdot 2x$$

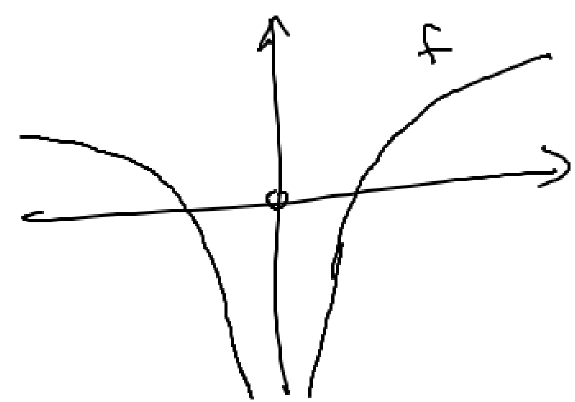
$f'>0$ dla $(0,\infty)$

$f'<0$ na $(-\infty,0)$

$$f'(x)=\frac{2}{x}=0$$

nie ma rozwiązań

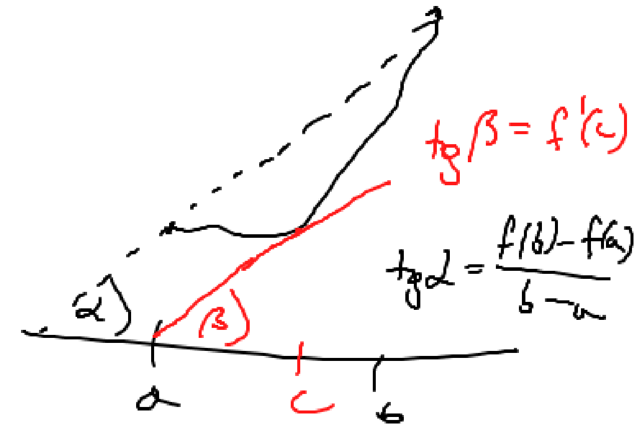
$\Rightarrow f$ nie ma ekstremów lokalnych



Przypomnienie.

Tw. Lagrange'a $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ciągła na $[a,b]$, różniczkowalna na (a,b)

$$\Rightarrow \exists\, c\in(a,b) : \quad f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



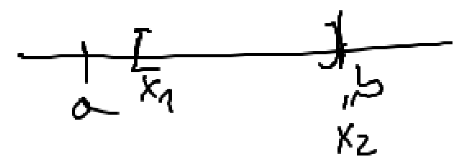
Wniosek. 1) Jeśli $f'=0$ na (a,b) ~~to~~ i f jest ciągła $[a,b]$, to f jest stała na $[a,b]$.

2) Jeśli $f'=0$ na (a,b), to f jest stała na (a,b).

Dd. 2) $x_1,x_2\in(a,b)$

1) Jeśli $x_1,x_2\in[a,b]$ i $x_1<x_2$, to $f|_{[x_1,x_2]}$ jest cg. i różniczkowalna na (x_1,x_2).

Z tw. Lagrange'a dla f na odcinku $[x_1,x_2]$ otrzymujemy, że $\exists\, c\in(x_1,x_2)$:



$$0 = f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \Rightarrow f(x_1)=f(x_2).$$

bo $c\in(a,b)$

$\Rightarrow f$ jest stała na $[a,b]$.

Przykład.

Rozwiązanie $f(x) = \sin x \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$$f'(x) = (\sin x)' \cdot \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \sin x \cdot \left(\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)' =$$

$$= \cos x \cdot \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \sin x \cdot \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \cdot \underbrace{\left(x+\frac{\pi}{4}\right)'}_{=1} =$$

$$= \cos\left(x + \left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right) = \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Big(\overbrace{\tfrac{1}{2}\sin\left(2x+\tfrac{\pi}{4}\right)}^{g(x)}\Big)' =$$

$$= \frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(2x+\frac{\pi}{4}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2} 2 \cdot \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \big(f(x)-g(x)\big)' = f'(x) - g'(x) = \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}$$

Z wniosku: $f(x)-g(x) = c = \text{const.}$ dla $x \in \mathbb{R}$

$$c = f(0)-g(0) = \sin 0 \cos\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4} = 0 - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \quad f(x)-g(x) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \quad \Rightarrow \quad \sin x \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin x \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Np.

Znaleźć $\underbrace{\text{zbiór wartości}}_{=\{f(x):\ x>0\}}$ funkcji $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $x>0$.

1) f jest ciągła

2) Znajdziemy przedziały monotoniczności f, licząc f':

$$f'(x)=\frac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot (x)'}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$f'(x)>0$

$\dfrac{1-\ln x}{x^2}>0 \quad |\cdot x^2>0$

$1-\ln x>0$

$1>\ln x$

$\ln e^1>\ln x$

$e>x$

$x\in(0,e)$

podobnie

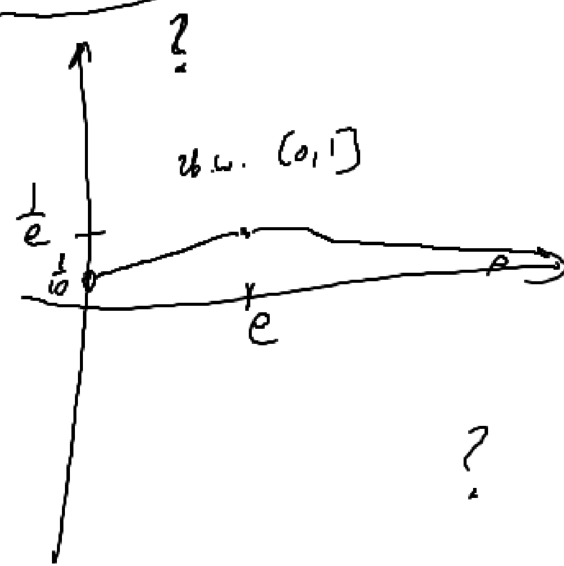
$\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0$

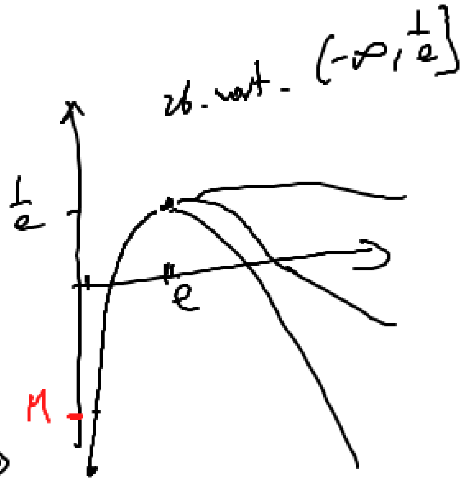
...

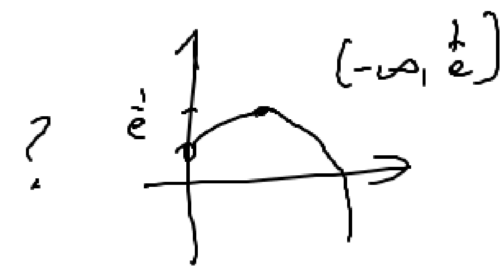
$x\in(e,\infty)$

$f\nearrow$ na $(0,e]$

$f\searrow$ na $[e,\infty)$







Policzymy granice w 0^+ i w ∞.

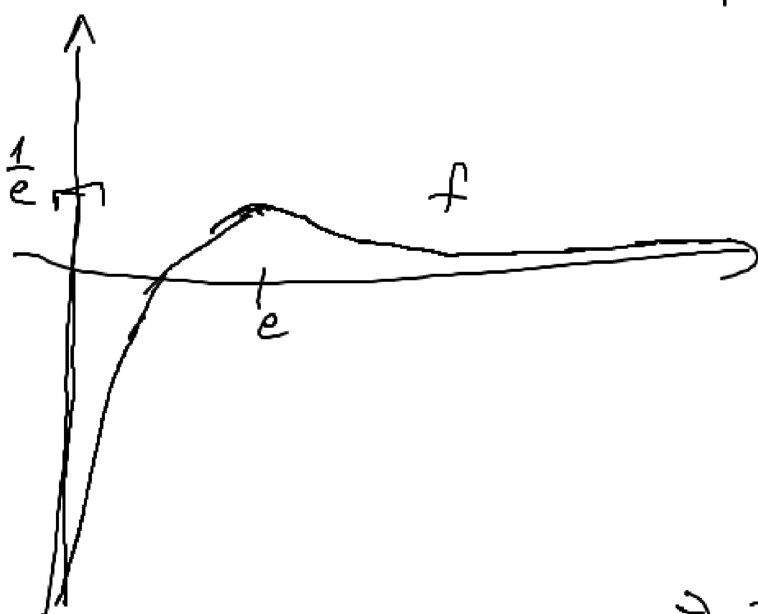
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

$\Rightarrow$ zb. wartości f na zbiorze $(0,e]$ jest $(-\infty, \frac{1}{e}]$

$\Rightarrow$ zb. wartości f na $(0,\infty)$ jest $(-\infty, \frac{1}{e}]$

(Już nie trzeba liczyć $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$.)

$\Rightarrow$



Ponieważ $f \uparrow$ na $(0,e]$, więc

$f(x) \leq \underset{\frac{1}{e}}{\underset{\shortparallel}{f(e)}}$ dla $x \in (0,e]$

Ponieważ $f \downarrow$ na $[e,\infty)$, więc

$f(x) \leq f(e)$ dla $x \in [e,\infty)$

$\Rightarrow$ $f(e)$ jest największą wartością funkcji f.

~~Dowodzi~~ Stąd wynika, że $\underbrace{f((0,\infty))}_{\text{zb. wartości } f \text{ na } (0,\infty)} \subset \left(-\infty, \frac{1}{e}\right]$.

$A \subset B \iff \forall x \in A \; x \in B$

Pokażemy, że zachodzi również przeciwna inkluzja: $f((0,\infty)) \supset \left(-\infty, \frac{1}{e}\right]$.

Weźmy jakiekolwiek $M \in \left(-\infty, \frac{1}{e}\right]$.

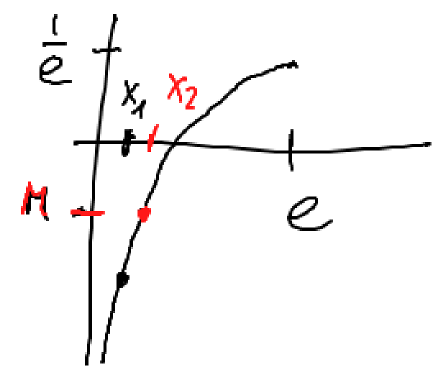
Ponieważ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, więc z def. granicy istnieje punkt $x_1 \in (0, e)$ taki, że $f(x_1) < M$.

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = -\infty$

Rozważając f na $[x_1, e]$ i korzystając z tw. Darboux:

$$f(x_1) < M \le f(e) = \frac{1}{e}$$

widzimy, że istnieje $x_2 \in [x_1, e]$ taki, że $f(x_2) = M$.



$\Rightarrow f((0,\infty)) = \left(-\infty, \frac{1}{e}\right]$.

Np.

$$\Big(\operatorname{arctg}(\underbrace{x^2+2\sqrt{2}}_{y})\Big)' =$$

$$= \frac{1}{1+(x^2+2\sqrt{2})^2}\cdot(x^2+\underbrace{2\sqrt{2}}_{\text{f. stała}})' =$$

$$= \frac{1}{1+(x^2+2\sqrt{2})^2}\cdot\underbrace{(2x+0)}_{2x}$$

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{1+y^2}$$

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\underbrace{c}_{\text{f. stała}})' = 0$$

Np.

$$f(x) = (\underbrace{e^{-\sqrt{2x}} + \pi}_{y})^3$$

$$(y^3)' = 3y^{3-1} = 3y^2$$

$$(e^y)' = e^y$$

$$f'(x) = 3\left(e^{-\sqrt{2x}}+\pi\right)^2 \cdot \left(e^{\overbrace{-\sqrt{2x}}^{\tilde{y}}}+\pi\right)' = 3\left(e^{-\sqrt{2x}}+\pi\right)^2 \cdot \left(e^{-\sqrt{2x}} \cdot \left(-\sqrt{2x}\right)' + 0\right)$$

$$\left(-\sqrt{2x}\right)' = -\left(\sqrt{\underbrace{2x}_{\tilde{y}}}\right)' = -\frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot (2x)' = -\frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2 = \frac{-1}{\sqrt{2x}}$$

$$(\sqrt{y})' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

II sposób

$$\left(-\sqrt{2} \cdot \sqrt{x}\right)' = -\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' = -\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x}}$$

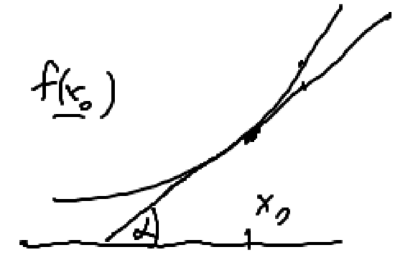
Wzór przybliżony

r-nie stycznej do wykresu f w punkcie $(x_0, f(x_0))$:

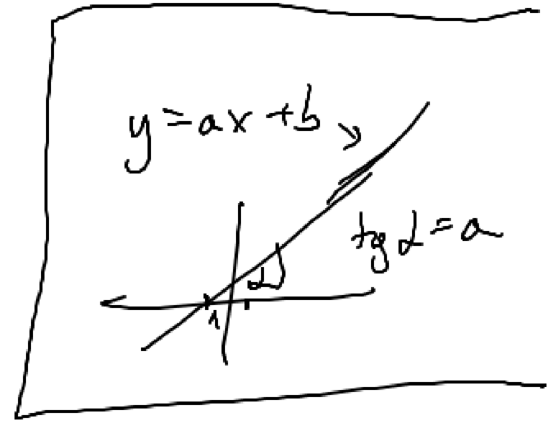
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$y = f(x)$ - wykres funkcji



$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$



Wzór przybliżony

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad, \text{dla } x \approx x_0$$

Np. Ile to, w przybliżeniu, $\sqrt{1,003}$?

$f(x)=\sqrt{x}$ $\qquad$ $f(1,003)=\sqrt{1,003}\approx ?$

$f(1)=\sqrt{1}=1$

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \quad \text{dla } x\approx x_0$$

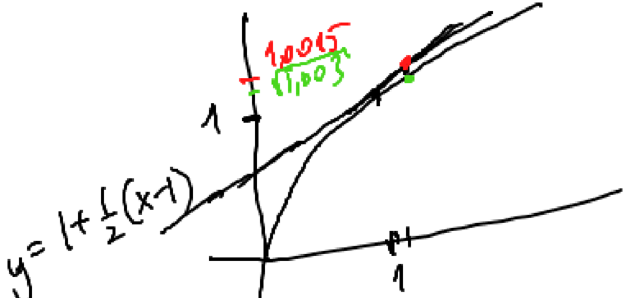
$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Weźmiemy $x_0=1$:

$$\sqrt{x}\approx\sqrt{1}+\frac{1}{2\sqrt{1}}\cdot(1,003-1)=1+\frac{1}{2}\cdot 0,003=1+0,0015=$$
$$=1,0015$$

Ale

$\underset{\substack{\parallel \\ 2}}{\sqrt{4}}\approx 1+\frac{1}{2}\cdot 3=2,5$



W rzeczywistości:

$\sqrt{1,003}\approx 1,00149887668...$

Oszacowanie błędów pomiaru:

powiedzmy, że mierzymy jakąś wielkość x z błędem bezwzględnym $\Delta x > 0$

(tzn. prawdziwa wielkość $\in [x-\Delta x, x+\Delta x]$)

Np. $x = 134\,mm \pm \underbrace{1\,mm}_{\Delta x}$

wówczas błąd bezwzględny $f(x)$ jest w przybliżeniu nie większy niż

$$\Delta x \cdot |f'(x)|$$

$$V(x) = x^3$$
$$V'(x) = 3x^2$$

Np. objętość sześcianu o boku x:

$V(x) = x^3 = 134^3$ $[mm^3]$

Błąd bezwzględny ΔV (w przybliżeniu) nie przekracza

$\Delta x \cdot V'(x) =$

$= 1 \cdot 3 \cdot 134^2$ $[mm^3]$

$= 53868 < 54000$

$V = (13.4)^3\ cm^3$,

$\pm 54\ cm^3$

$\approx 2406\ cm^3 \pm 54\ cm^3$

$133^3 \approx 2352$
$135^3 \approx 2460$

Np. Kwadrat o boku $x = 100\,mm \pm 1\,mm$. [Błąd względny 1%]

Jaki błąd względny popełniamy przy obliczeniu pola $\square = 100^2\,(mm^2)$.

Rozw.

w przybl.

$$|\text{Błąd bezwzgl.}| \leq \underline{1} \cdot 200 = 200 \quad [mm^2]$$

bo x ma błąd bezwzgl. 1

$P(x) = x^2$

$P'(x) = 2x$

$P'(100) = 200$

$$|\text{błąd względny}| \leq \frac{|\text{błąd bezwzgl.}|}{100^2} \leq \frac{1 \cdot 200}{10\,000} = \frac{2}{100} = 2\%$$