Policzmy

$$\left(\operatorname{tg}^3\left(2x+3\sin\frac{\pi}{7}\right)\right)' = 3\operatorname{tg}^2\left(2x+3\sin\frac{\pi}{7}\right)\cdot\left(\operatorname{tg}\left(2x+3\sin\frac{\pi}{7}\right)\right)' =$$

$$\left(\begin{array}{l} f(y)=y^3 \\ y(x)=\operatorname{tg}\left(2x+3\sin\frac{\pi}{7}\right) \end{array}\right)$$

$$\left(f(y(x))\right)' = f'(y(x))\cdot y'(x)$$

$$f'(y)=3y^2$$

$$(\operatorname{tg} y)' = \frac{1}{\cos^2 y} = 1+\operatorname{tg}^2 y$$

$$= 3\operatorname{tg}^2\left(2x+3\sin\frac{\pi}{7}\right)\cdot\frac{1}{\cos^2\left(2x+3\sin\frac{\pi}{7}\right)}\cdot\underbrace{\left(2x+3\sin\frac{\pi}{7}\right)'}_{\parallel}$$

$$(2x)' + \left(3\sin\frac{\pi}{7}\right)' = 2+0$$

Całka nieoznaczona

Jeśli $F:(a,b)\to\mathbb{R}$, $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ oraz $F'(x)=f(x)$ dla $x\in(a,b)$,

to mówimy, że F jest funkcją pierwotną f.

(mówimy też, że f jest pochodną F).

Całką nieoznaczoną funkcji $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ nazywamy rodzinę wszystkich jej funkcji pierwotnych, ozn.

$$\int f(x)\,dx = \{F:(a,b)\to\mathbb{R} \mid F'(x)=f(x) \text{ dla } x\in(a,b)\}$$

Jeśli $F_1'(x)=F_2'(x)=f(x)$, to $(F_1-F_2)'(x)=0$ dla $x\in(a,b)$, więc $F_1-F_2=\text{const.}$ na (a,b).

Np.

$$\int \cos x\,dx = \{\underbrace{x\mapsto \sin x + c}_{\text{funkcja}} \;;\; c\in\mathbb{R}\}$$

bo $(\sin x+c)'=\cos x$

Dla uproszczenia notacji piszemy to tak:

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\left\{ (\sin x)' = \cos x \right.$$

Np. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$ oraz $\int \cos x \, dx = 3 + \sin x + C$

co wygląda na sprzeczność, ale nią nie jest, bo są to skrótowe zapisy

$$\int \cos x \, dx = \{x \mapsto \sin x + C : C \in \mathbb{R}\} \quad \text{oraz} \quad \int \cos x \, dx = \{x \mapsto 3 + \sin x + C : C \in \mathbb{R}\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{x : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \\ \{x + 3 : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Zapis

$x \mapsto \sin x + c$

oznacza funkcję f określoną wzorem $f(x) = \sin x + c$.

(~~[illegible]~~

$\int \sin x + c$

Niech $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

~~Def.~~ Uwaga. Jeśli $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to istnieje $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ taka, że $F'(x) = f(x)$ dla $x \in (a,b)$.

Innymi słowy, każda funkcja cg. ma funkcję pierwotną, a więc też (niepustą) całkę nieoznaczoną. Może się jednak zdarzyć, że funkcji pierwotnej nie da się wyrazić za pomocą funkcji elementarnych.

Np. $\int e^{-x^2}dx$ nie wyraża się za pomocą f. elementarnych.

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

$$\int c f(x)\,dx = c \int f(x)\,dx, \quad c\text{ - stała}$$

$$\int f(x) g(x)\,dx = ?$$

$$\int f(g(x))\,dx = ?$$

Np.:

$$\int \left(3x^4 + \sqrt[3]{x}\right) dx =$$

$$= \int 3x^4\, dx + \int x^{\frac{1}{3}}\, dx =$$

$$= 3\int x^4\, dx + \frac{1}{\frac{4}{3}} x^{\frac{4}{3}} + C =$$

$$= 3\left(\frac{1}{5}x^5 + c'\right) + \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C =$$

$$= \frac{3}{5}x^5 + \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + \underbrace{\boxed{3c' + C}}_{\tilde{c}} =$$

(nowa stała)

$$= \frac{3}{5}x^5 + \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + \tilde{C}$$

Spr.

$$\left(\frac{3}{5}x^5 + \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + \tilde{C}\right)' = \frac{3}{5}\cdot 5x^4 + \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} + 0 =$$

$$= 3x^4 + \sqrt[3]{x}$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

zał. $n \neq 0$:

$$\left(\frac{1}{n} x^n\right)' = x^{n-1}$$

$k = n-1$, czyli $n = k+1$:

$$\left(\frac{1}{k+1} x^{k+1}\right)' = x^k$$

$(k \neq -1)$

czyli

$$\int x^k\, dx = \begin{cases} \frac{1}{k+1} x^{k+1} + c, & k \neq -1 \\ \ln|x| + c, & k = -1 \end{cases}$$

Całkowanie przez części

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$(fg)' - fg' = f'g$$

$$\underbrace{\int (fg)'\,dx}_{fg \text{ jest (pewną) funkcją pierwotną funkcji } (fg)'} - \int fg'\,dx = \int f'g\,dx$$

$$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx =$$
$$\{F + c : c \in \mathbb{R}\} \quad \{G + \tilde{c} : \tilde{c} \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{F + G + c + \tilde{c} : c, \tilde{c} \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{F + G + c : c \in \mathbb{R}\}$$
$$= \int (f(x) + g(x))\,dx$$

$$\Rightarrow \int (fg)'\,dx = fg + c$$

$$fg + c - \int fg'\,dx = \int f'g\,dx$$

Możemy pominąć. (Tak jak to zrobiliśmy ze stałą $\tilde{c}$ w ramce)

Dostajemy wzór:

$$\boxed{\int f'(x)\cdot g(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx}$$

wzór na całkowanie przez części

Przykłady

$$\int f'g = fg - \int fg'$$

$$\int x\cdot e^x\,dx = \int x\cdot(e^x)'\,dx = \int \underbrace{(e^x)'}_{f'}\cdot\underbrace{x}_{g}\,dx = e^x\cdot x - \int e^x\cdot(x)'\,dx =$$

$$= e^x x - \int e^x\,dx = \underbrace{e^x x - e^x}_{\text{pełna f. pierwotna}} + c$$

$x \mapsto xe^x$

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

Można też próbować tak:

$$\int x\cdot e^x\,dx = \int \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)'}_{f'}\cdot\underbrace{e^x}_{g}\,dx \overset{\text{c.p.cz.}}{=} \tfrac{1}{2}x^2\cdot e^x - \int \tfrac{1}{2}x^2\cdot(e^x)'\,dx = \tfrac{1}{2}x^2e^x - \int \tfrac{1}{2}x^2e^x\,dx$$

dostaliśmy bardziej skomplikowaną całkę :(

Pughled

$$\int f'g = fg - \int fg'$$

$$\int \sin x \cos 2x \, dx = \int \underbrace{(-\cos x)'}_{f_1'} \underbrace{\cos 2x}_{g_1} \, dx =$$

$$= -\cos x \cdot \cos 2x - \int (-\cos x) \cdot (\cos 2x)' \, dx =$$

$$= -\cos x \cdot \cos 2x - \int \cos x \cdot \sin 2x \cdot 2 \, dx =$$

$$= -\cos x \cdot \cos 2x - 2 \int \underbrace{(\sin x)'}_{f_2'} \cdot \underbrace{\sin 2x}_{g_2} \, dx =$$

$$= -\cos x \cdot \cos 2x - 2 \left[\sin x \cdot \sin 2x - \int \sin x \cdot 2 \cos 2x \, dx \right] =$$

$$= -\cos x \cdot \cos 2x - 2 \sin x \sin 2x + 4 \int \sin x \cos 2x \, dx$$

Stad

$$-3 \int \sin x \cos 2x \, dx = -\cos x \cdot \cos 2x - 2 \sin x \sin 2x + C,$$ igy

$$\boxed{\int \sin x \cos 2x \, dx = \frac{1}{3} \cos x \cos 2x + \frac{2}{3} \sin x \sin 2x + C}$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$(\cos 2x)' = -\sin 2x \cdot 2$$

$f(y) = \cos y \quad f'(y) = -\sin y$

$y(x) = 2x$

$f(y(x))' = f'(y(x)) \cdot y'(x)$

$$(\sin 2x)' = 2 \cos 2x$$

Podobnie można obliczyć następujące całki:

$$\int \sin(ax)\sin(bx)\,dx$$

$$\int \cos(ax)\sin(bx)\,dx$$

$$\int \cos(ax)\cos(bx)\,dx$$

$$\int a^x \sin(bx)\,dx$$

$$\int a^x \cos(bx)\,dx$$

N1:

$$\boxed{\int f'g = fg - \int fg'}$$

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = \int \underbrace{(x)'}_{f'} \cdot \underbrace{\ln x}_{g} \, dx = x \ln x - \int x \cdot (\ln x)' \, dx =$$

$$= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C$$

Spr.

$$(x \ln x - x + C)' = (x \ln x)' - 1 + 0 =$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$= (x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' - 1 =$$

$$= \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x$$

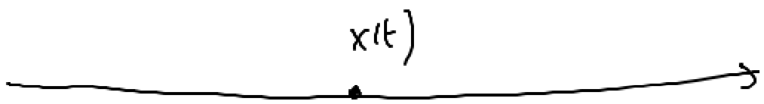
Podobnie można policzyć $\int \arcsin x\, dx$, $\int \arccos x\, dx$, $\int \operatorname{arctg} x\, dx$

$x(t) \in \mathbb{R}$ = położenie cząstki w chwili t Np. $x(t)=t^2$

różniczkowanie

$x'(t)$ = prędkość chwilowa cząstki w chwili t

Np. $x'(t) = 2t$



całkowanie

$\int v(t)\,dt = \underbrace{S(t)+c}_{\text{rodzina f. pierwotnych}}$

$v(t)$ = prędkość chwilowa w chwili t

Np. $v(t) = 2t$

$\int v(t)\,dt = t^2 + c$

Inny sposób liczenia $\int \sin x \cos 2x \, dx$:

$$\sin x \cos 2x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \cdot \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} =$$

$$= \frac{e^{3ix} + e^{-ix} - e^{ix} - e^{-3ix}}{4i} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} - \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} =$$

$$= \frac{1}{2} \sin 3x - \frac{1}{2} \sin x$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x$$

$+$

$+ \Rightarrow e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x$

$$\boxed{\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}}$$

$$\boxed{\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}$$

$(e^a)^n = e^{an}$, $e^{a+b} = e^a e^b$ też dla $a, b \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$

Stąd

$$\int \sin x \cos 2x \, dx = \int \left(\frac{1}{2}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 3x \, dx - \frac{1}{2}\int \sin x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right) - \frac{1}{2}\left(-\cos x\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{6}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos x + C$$

$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

$(-\cos 3x)' = \sin(3x) \cdot \underbrace{3}_{(3x)'}$

$\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)' = \sin 3x$

Poprzednio wyszło nam, że $\int \sin x \cos 2x \, dx = \frac{1}{3}\cos x \cos 2x + \frac{2}{3}\sin x \sin 2x + C$

Stąd wynika, że

$$\boxed{-\frac{1}{6}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{3}\cos x \cos 2x + \frac{2}{3}\sin x \sin 2x} + \tilde{C}$$

wstawiając $x=0$: $-\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \tilde{C} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \tilde{C} \Rightarrow \boxed{\tilde{C} = 0}$