Przypomnienie

$$\int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx$$

Przykład

$$\int \underbrace{x^2}_{\left(\frac{x^3}{3}\right)'} \cdot \underbrace{\sin x}_{(-\cos x)'}\,dx = \int x^2 (-\cos x)'\,dx = \int (-\cos x)' \cdot x^2\,dx = -\cos x \cdot x^2 - \int (-\cos x)\cdot 2x\,dx =$$

$$= -\cos x \cdot x^2 + 2\int \cos x \cdot x\,dx = -\cos x \cdot x^2 + 2\int (\sin x)' \cdot x\,dx =$$

$$= -\cos x \cdot x^2 + 2\Big[\sin x \cdot x - \underbrace{\int \sin x \cdot 1\,dx}_{= -\cos x + C}\Big] = \underline{-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C}$$

Spr. $\underbrace{(-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c)'}$ $= \cancel{-2x\cos x} + (-x^2)\cdot(-\sin x) + \cancel{2\sin x} + \cancel{2x\cos x} \cancel{-2\sin x}$

$(fg)' = f'g + fg'$

$$= \underbrace{x^2 \sin x}$$

Całkowanie przez podstawienie

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + C,$$

gdzie $F'(y) = f(y)$

(czyli F jest f. pierwotną funkcji f)

Spr.

$$\big(F(\varphi(x)) + c\big)' = F'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) + 0 = f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

Przykład

$$\int e^{-x^2}\cdot(-2x)\,dx = \int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + c = e^{\varphi(x)} + c = e^{-x^2} + c$$

$f(y) = e^y$, $\varphi(x) = -x^2$

gdzie $F(y) = \int e^y\,dy = e^y + c$

Jeszcze raz, używając tradycyjnej notacji:

$$\int e^{-x^2}\cdot\boxed{(-2x)\,dx} = \left|\begin{array}{l} y = -x^2 \\ dy = \boxed{-2x\,dx} \end{array}\right| = \int e^{y}\,dy = e^{y}+c = \underline{e^{-x^2}+c}$$

<u>Przykłady</u>

$$\int \sin(3x)\boxed{dx} = \left|\begin{array}{l} y = 3x \\ dy = 3\,dx \;\Big|\cdot\frac{1}{3} \\ \underline{\frac{1}{3}\,dy = \boxed{dx}} \end{array}\right| = \int \sin y\ \frac{1}{3}\,dy = \frac{1}{3}\int \sin y\,dy =$$

$$= -\frac{1}{3}\cos y + C = \underline{-\frac{1}{3}\cos 3x + C}$$

<u>Spr</u> $$\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)' = -\frac{1}{3}\left(\cos(3x)\right)' = -\frac{1}{3}\left(-\sin(3x)\right)\cdot(3x)' = \frac{1}{3}\sin 3x\cdot 3 = \sin 3x$$

$$\int \sqrt{1+3x^3}\, \underbrace{x^2\, dx} = \left| \begin{array}{l} y = 1+3x^3 \\ dy = 9x^2 dx \ \Big| \cdot \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} dy = x^2 dx \end{array} \right| = \int \sqrt{y} \cdot \frac{1}{9}\, dy = \frac{1}{9} \int y^{\frac{1}{2}}\, dy =$$

$$\int y^n dy = \begin{cases} \frac{y^{n+1}}{n+1} + c, & n \neq -1 \\ \ln|y| + c, & n = -1 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{9} \frac{y^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3}\, y^{\frac{3}{2}} + c =$$

$$= \underbrace{\frac{2}{27} \left(1+3x^3\right)^{\frac{3}{2}} + C}$$

Np.:

$$\int \left(x^{100}+x^{50}+1\right)^2 x^{49}\,dx = \left| \begin{array}{l} y = x^{50} \\ dy = 50x^{49}\,dx \\ \frac{1}{50}\,dy = x^{49}\,dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{50}\int \left(y^2+y+1\right)^2 dy = \frac{1}{50}\int \left(y^4+\underline{y^2}+1+2y^3+\underline{2y^2}+2y\right) dy =$$

$$= \frac{1}{50}\int \left(y^4+2y^3+3y^2+2y+1\right) dy = \frac{1}{50}\left(\frac{y^5}{5}+2\frac{y^4}{4}+3\frac{y^3}{3}+2\frac{y^2}{2}+y\right)+C =$$

$$= \frac{1}{250}x^{250}+\frac{1}{100}x^{200}+\frac{1}{50}x^{150}+\frac{1}{50}x^{100}+\frac{1}{50}x^{50}+C$$

$$\int \sin^3 x \underbrace{\cos x \, dx}_{dy} = \left| \begin{array}{l} y = \sin x \\ dy = \cos x \, dx \end{array} \right| = \int y^3 \, dy = \frac{y^4}{4} + c = \underline{\frac{\sin^4 x}{4} + C}$$

$$= \quad \text{chcemy:} \quad \left| \begin{array}{l} y = \cos x \\ dy = -\sin x \, dx \\ ? \end{array} \right|$$

$$-\int \underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x} \cos x \underbrace{(-\sin x) \, dx}_{dy} = -\int (1-y^2) y \, dy = -\int (y - y^3) \, dy =$$

$$= -\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} + c = \underline{-\frac{\cos^2 x}{2} + \frac{\cos^4 x}{4} + C}$$

<u>Wniosek:</u> $-\frac{\cos^2 x}{2} + \frac{\cos^4 x}{4} + \tilde{c} = \frac{\sin^4 x}{4}$

biorąc $x = 0$: $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \tilde{c} = 0 \rightarrow \tilde{c} = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{\cos^2 x}{2} + \frac{\cos^4 x}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\sin^4 x}{4}}$$

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \ln x \cdot \underbrace{\frac{1}{x}\,dx} = \left| \begin{array}{l} y = \ln x \\ dy = \frac{1}{x}\,dx \end{array} \right| = \int y\,dy = \frac{y^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C$$

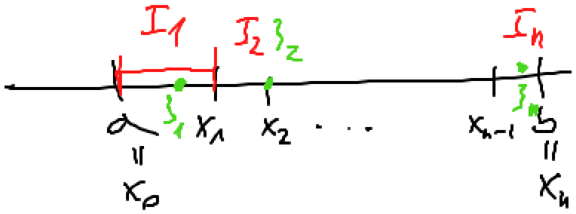
Całka oznaczona

Niech $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ będzie ograniczona, tzn. istnieją liczby $m, M\in\mathbb{R}$ takie, że

$m\le f(x)\le M$ dla $x\in[a,b]$.

Rozważmy podział odcinka $[a,b]$ na pododcinki wyznaczony przez punkty

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b,$$



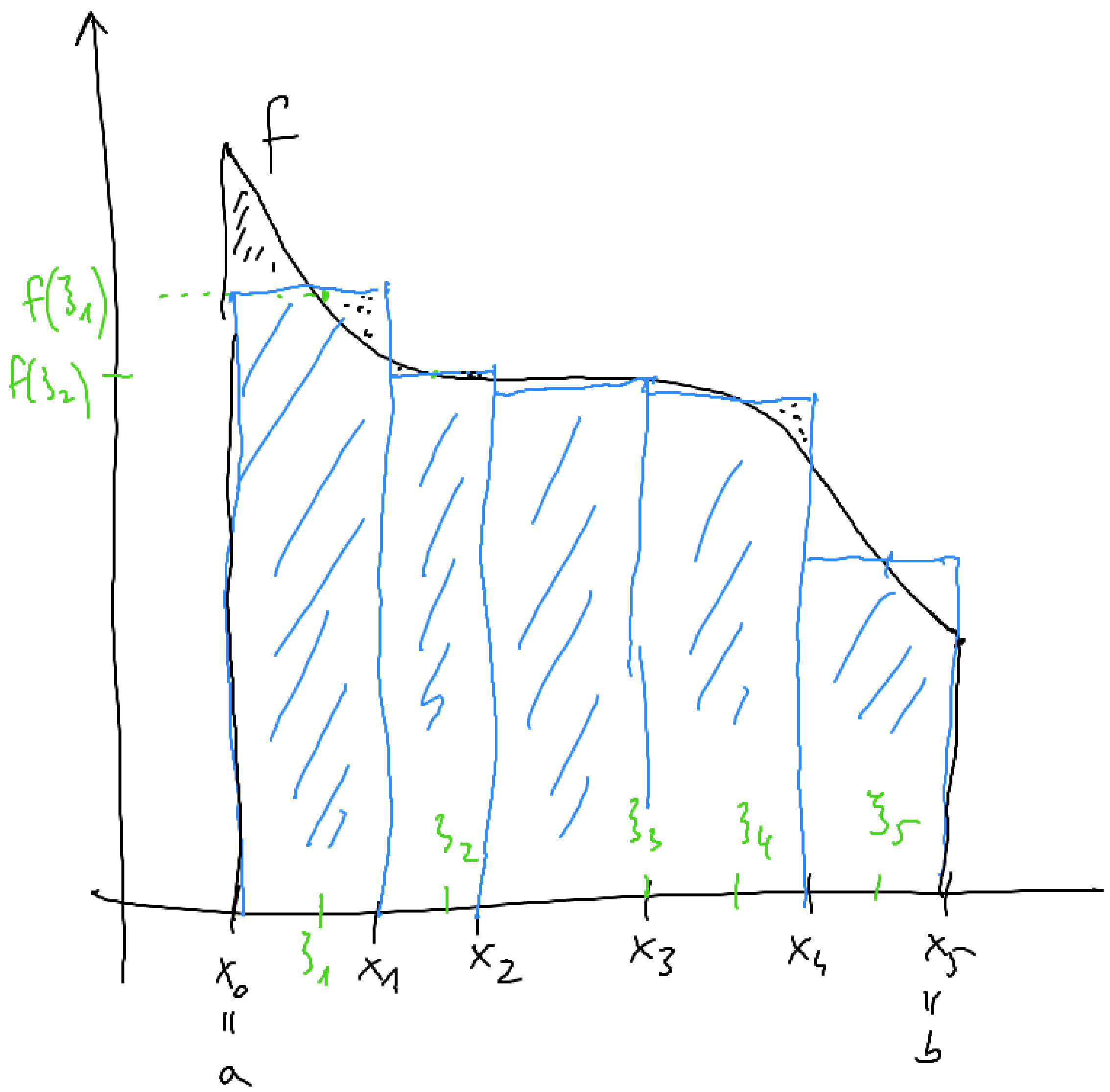
tzn. rozważamy ciąg odcinków

$$\underbrace{[x_0,x_1]}_{I_1},\ \underbrace{[x_1,x_2]}_{I_2},\ \ldots,\ \underbrace{[x_{n-1},x_n]}_{I_n}.$$

Rozważmy punkty pośrednie $\xi_k\in I_k$, $k=1,2,\ldots,n$. Oznaczmy

$$S\left(f,([x_{k-1},x_k])_{k=1}^{n},(\xi_k)_{k=1}^{n}\right)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot(x_k-x_{k-1}).$$

Załóżmy, że $f > 0$.

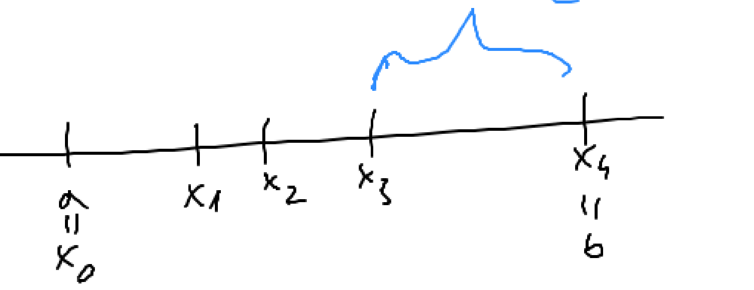


$$S\left(f, ([x_{k-1}, x_k])_{k=1}^{5}, (\xi_k)_{k=1}^{5}\right) =$$

= suma pól niebieskich prostokątów.

Średnica podziału $([x_{k-1}, x_k])_{k=1}^n$ to długość najdłuższego odcinka podziału, czyli

$$\delta\left(([x_{k-1},x_k])_{k=1}^n\right) = \max_{k=1,2,\dots,n}(x_k - x_{k-1})$$



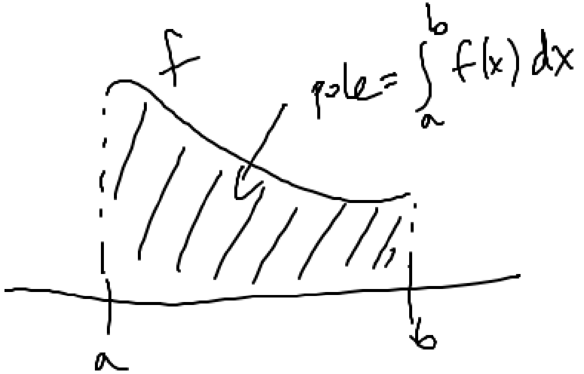
Mówimy, że sumy całkowe $S(f,([x_{k-1},x_k])_{k=1}^n,(\xi_k)_{k=1}^n)$ zbiegają do liczby $g\in\mathbb{R}$ przy średnicach podziałów zbiegających do zera, jeśli

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{P\text{ - podział odcinka } [a,b]}\ \forall_{(\xi_k)}\left(\delta(P)<\delta \Rightarrow \left|S(f,P,(\xi_k))-g\right|<\varepsilon\right).$$

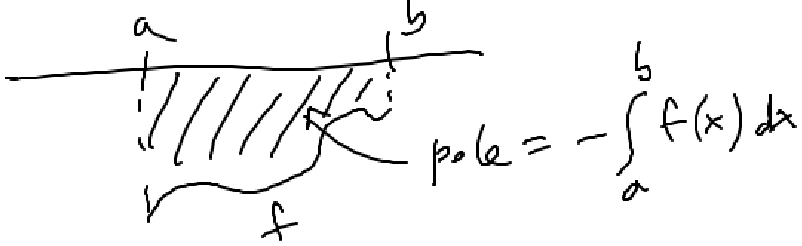
punkty pośrednie z podziału P

Jeśli dla $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ograniczonej istnieje $g \in \mathbb{R}$ takie, że sumy całkowe f zbiegają do g przy średnicach podziału dążących do 0, to mówimy, że <u>f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a,b]$</u>, lub w skrócie, piszemy <u>$f \in \mathcal{R}[a,b]$</u>. Ponadto piszemy $g = \int_a^b f(x)\,dx$.

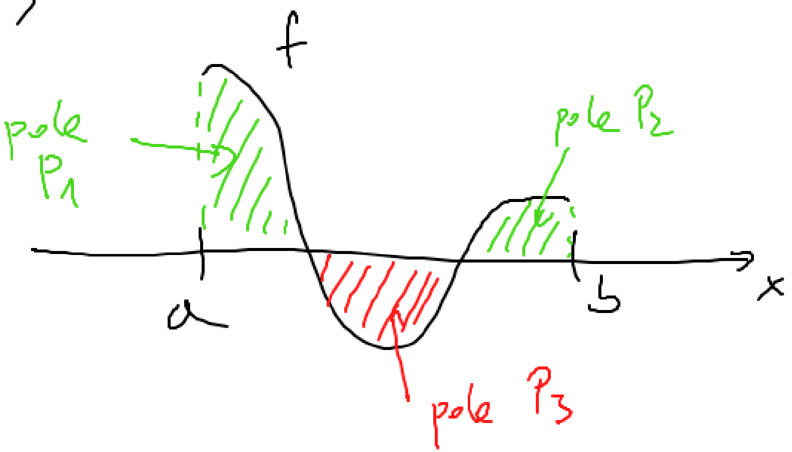
Jeśli $f \geq 0$ na $[a,b]$, to wtedy $\int_a^b f(x)\,dx$ = pole pod wykresem f na $[a,b]$



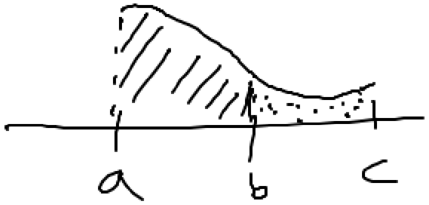
Gdy $f \leq 0$, to $\int_a^b f(x)\,dx = -$pole pomiędzy wykresem f na $[a,b]$ a Ox



Ogólnie,

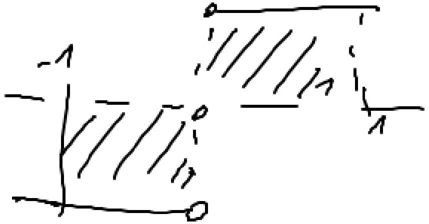


$$\int_a^b f(x)\,dx = P_1 - P_3 + P_2$$



Tw. Jeśli $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła, to $f\in\mathcal{R}[a,b]$.

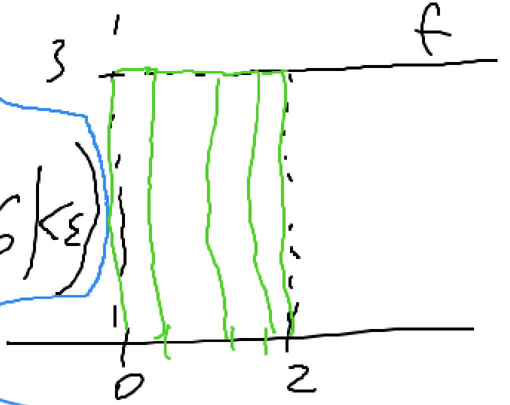
(Ale nie na odwrót, tj. istnieją nieciągłe funkcje $f\in\mathcal{R}[a,b]$).



Tw. Jeśli $a<b<c$ oraz $f:[a,c]\to\mathbb{R}$ jest taka, że $f\restriction_{[a,b]}\in\mathcal{R}[a,b]$, $f\restriction_{[b,c]}\in\mathcal{R}[b,c]$, to wtedy $f\in\mathcal{R}[a,c]$ oraz

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Np: $f(x) = 3$ na $[0,2]$.



Pokażemy, że $\int_0^2 f(x)\,dx = 6$.

$$\left\{ \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \underset{[0,2]}{\forall_{P\text{-podział}}}\ \underset{\substack{\text{punkty pośrednie}\\ \text{z } P}}{\forall_{(\xi_k)}} \left(\delta(P) < \delta \Rightarrow \left|S(f,P,(\xi_k)) - 6\right| < \varepsilon\right)\right.$$

Weźmy dow. $\varepsilon > 0$. Wybieramy $\delta = 1$. (jakakolwiek byłaby dobra).

Weźmy podział $P = \left([x_{k-1}, x_k]\right)_{k=1}^{n}$, $\delta(P) < \delta$ i weźmy $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

$$S(f, P, (\xi_k)) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 3(x_k - x_{k-1}) = 3\big((x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots$$

$$\ldots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1})\big) = 3(x_n - x_0) = 3(2-0) = 6$$

$$|S(f, P, (\xi_k)) - 6| = 0 < \varepsilon.$$

Tw. (Newtona-Leibnitza)

Załóżmy, że $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła. Niech $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ będzie funkcją pierwotną f. Wówczas

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Np:

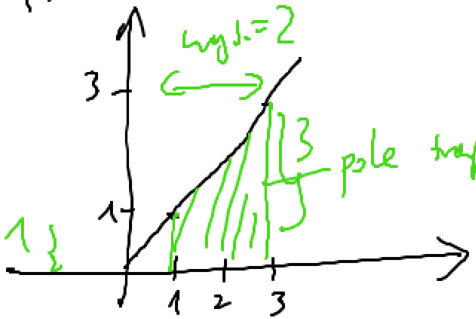
$$\int_1^3 x\,dx = F(3) - F(1) = \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{9-1}{2} = 4.$$

$f(x)=x$

$F(x)=\frac{x^2}{2}$ $\quad F'(x)=x$

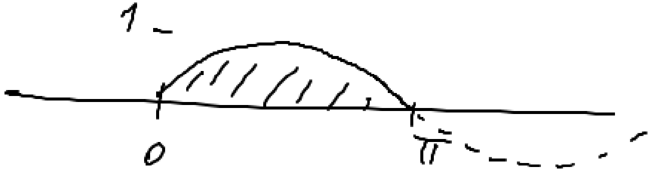
Ale $\tilde{F}(x)=\frac{x^2}{2}+7$ też jest f. pierw. f.

$$\int_1^3 x\,dx = \tilde{F}(3) - \tilde{F}(1) = \left(\frac{3^2}{2}+7\right) - \left(\frac{1^2}{2}+7\right) = \frac{9-1}{2} = 4$$



pole trapezu $= \frac{1+3}{2}\cdot 2 = 2\cdot 2 = 4$

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos(\pi) - \left(-\cos(0)\right) = 1 + 1 = 2$$



$$(\cos x)' = \sin x$$

Oznaczenie.

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(x)\Big|_a^b$$

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = (-\cos x)\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 2$$

Np.

$$\int_0^1 x e^x \, dx = \left(x e^x - e^x\right)\Big|_0^1 = \left(1 \cdot e^1 - e^1\right) - \left(0 \cdot e^0 - e^0\right) = 0 - (0 - 1) = \underline{1}.$$

Policzymy

$$\int x e^x \, dx = \int x (e^x)' \, dx = x e^x - \int (x)' e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = \underline{x e^x - e^x + C}$$

$$\int f g' = f g - \int f' g$$

Np.

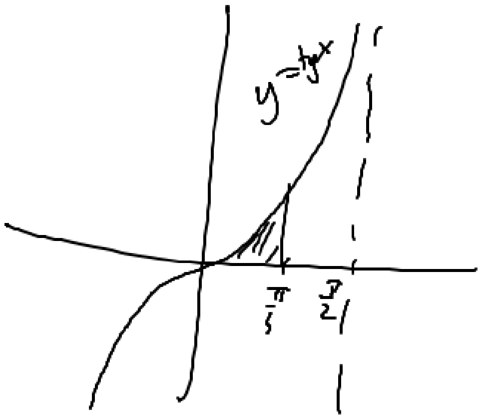
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg\,x\,dx = \left(-\ln|\cos x|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| + \ln|\cos 0| =$$

$$= -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \ln 1 =$$

$$= -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= -\ln 2^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2$$



Policzymy

$$\int tg\,x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \left|\begin{array}{l} y = \cos x \\ dy = -\sin x\,dx \\ -dy = \sin x\,dx \end{array}\right| =$$

$$= -\int \frac{dy}{y} = -\ln|y| + C = -\ln|\cos x| + C$$