Oblicz

$$\int \underbrace{\frac{x^4+2x^3+x+1}{x^3+2x^2+2x+1}}_{f(x)}\,dx$$

1) Funkcja wymierna jest niewłaściwa (tzn. stopień licznika $\geq$ stopień mianownika), więc najpierw wykonujemy dzielenie.

$$\begin{array}{l}
\quad x+1 \quad \leftarrow \text{iloraz z dzielenia} \\
\hline
(x^4+2x^3+x+1):(x^3+2x^2+2x+1) \\
-(x^4+2x^3+2x^2+x) \\
\hline
\quad x^3-2x^2+1 \\
\;-(x^3+2x^2+2x+1) \\
\hline
\quad \underbrace{-4x^2-2x}_{\text{reszta}}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
\quad 31 \leftarrow \text{iloraz} \\
\hline
220:7 \\
-21 \\
\hline
\;\;10 \\
\;-7 \\
\hline
\;\;\;\underbrace{3}_{\text{reszta}}
\end{array}$$

tzn. że

$$f(x) = x+1+\frac{-4x^2-2x}{x^3+2x^2+2x+1}$$

$$f(x) = x + 1 + \frac{-4x^2 - 2x}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$$

Ułamki proste:

$$\frac{A}{(x-a)^n} \quad \text{lub} \quad \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n}$$

$$p^2 - 4q < 0$$

2) Rozkładamy mianownik na czynniki rzeczywiste nierozkładalne

Spróbujmy poszukać pierwiastków wymiernych.

Jeśli $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ ma wsp. całkowite: $a_n, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$ i ma pierwiastek wymierny $\frac{p}{q}$, $NWD(p,q) = 1$, to

$p \mid a_0$, $q \mid a_n$

$P(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ $\quad a_n = a_3 = 1 \quad a_0 = 1$

Jeśli ten wielomian P ma pierwiastek wymierny, to jest nim $\frac{p}{q}$, gdzie $p \mid \overset{a_0}{\overset{\shortparallel}{1}}$ i $q \mid \overset{a_n}{\overset{\shortparallel}{1}}$,

czyli jest nim 1 lub -1.

$P(1) = 1 + 2 + 2 + 1 > 0$ $\quad P(-1) = -1 + 2 - 2 + 1 = 0$ udało się znaleźć pierwiastek!

To oznacza, że wielomian x^3+2x^2+2x+1 dzieli się (bez reszty) przez $x+1$.

$$
\begin{array}{l}
\quad\ x^2+x+1 \\
\hline
(x^3+2x^2+2x+1):(x+1) \\
-(x^3+x^2) \\
\hline
\quad x^2+2x+1 \\
\quad -(x^2+x) \\
\hline
\qquad x+1 \\
\qquad -\ x+1 \\
\hline
\qquad\ 0 \leftarrow \text{reszta}
\end{array}
$$

czyli

$$x^3+2x^2+2x+1 = (x+1)\underbrace{(x^2+x+1)}_{\text{liczymy } \Delta = 1-4 = -3 < 0}$$

zatem ten czynnik jest nierozkładalny (nad $\mathbb{R}$)

Zatem

$$f(x) = x+1 + \frac{-4x^2-2x}{(x+1)(x^2+x+1)} = x+1 + \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

Teraz znajdziemy A, B, C: z równości powyżej:

$$\frac{-4x^2-2x}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+x+1)}$$

Czyli

$$-4x^2-2x = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x+1) \quad (*)$$

I sposób (znalezienia A, B, C):

$$-4x^2-2x = (A+B)x^2 + (A+B+C)x + (A+C)$$

$$\begin{cases} -4 = A+B \\ -2 = A+B+C \quad \Big| -r_2 \\ 0 = A+C \end{cases} \qquad \begin{cases} -4 = A+B \\ -2 = B \\ 0 = A+C \end{cases} \longrightarrow -4 = A-2 \longrightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = -2 \\ C = 2 \end{cases}$$

II sposób: wstawiamy do $(*)$ za x pewne trzy liczby (mogą być to nawet liczby, dla których mianownik f się zeruje)

$$\begin{aligned} x=-1:&\quad -4+2 = A(1-1+1) + 0 \\ x=0:&\quad 0 = A+C \\ x=1:&\quad -4-2 = A(1+1+1) + (B+C)\cdot 2 \end{aligned}$$

$$\int x^n\,dx = \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, & n \neq -1 \\ \ln|x| + C, & n = -1 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln|x-a| + C$$

Wobec tego

$$f(x) = x + 1 + \frac{-2}{x+1} + \frac{-2x+2}{x^2+x+1}$$

Stąd

$$\int f(x)\,dx = \int (x+1)\,dx - 2\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{-2x+2}{x^2+x+1}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + x - 2\ln|x+1| + \int \frac{-2x+2}{x^2+x+1}\,dx.$$

Zostaje do policzenia całka $\int \frac{-2x+2}{x^2+x+1}\,dx$.

$$\int \frac{-2x+2}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{(-2x-1)+3}{x^2+x+1}\,dx = -\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + 3\int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$(x^2+x+1)' = 2x+1$$

gdyby w liczniku było np. $5x+7$, to $5x+7 = \frac{5}{2}(2x+1) + \frac{9}{2}$

Tutaj $-2x+2 = -1(2x+1)+3$

a)
$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \left| \begin{array}{l} y = x^2+x+1 \\ dy = (2x+1)\,dx \end{array} \right| = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C_1 = \ln|x^2+x+1| + C_1$$

b)
$$\int \frac{dx}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{dx}{\underbrace{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}_{x^2+x+\frac{1}{4}} + \frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} \int \frac{dx}{\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1} =$$

chcemy połowę

się

zamiast $3/4$ chcemy 1

podstawiamy $w = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$

$dw = \frac{2}{\sqrt{3}}\,dx \qquad dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\,dw$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,dw}{w^2+1} = \frac{4\sqrt{3}}{6}\,\mathrm{arctg}\,w + C_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + C_2$$

Całkowanie funkcji $R(\cos x, \sin x)$, gdzie R jest f. wymierną

Np. $\int \cos^3 x \sin^2 x \, dx$ $\quad \int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 1} dx$ $\quad \int \frac{dx}{3 - \cos x}$ itp.

tutaj zadziała $t = \sin x$ (ale nie $t = \cos x$)

tutaj ani $t = \sin x$, ani $t = \cos x$ nie działa

Przedstawimy kilka podstawień, które takie całki sprowadzą do całki z funkcji wymiernej.

- $t = \cos x$ lub $t = \sin x$

działa, gdy mamy całkę ~~funkcję~~ postaci

$$\int R(\cos x, \underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x}) \cdot \sin x \, dx$$

... gdy

$$\int R(\sin x, \underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x}) \cos x \, dx$$

Np.

$$\int \cos^3 x \sin^2 x \, dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x \, dx \end{array} \right| = -\int \underbrace{\cos^3 x}_{t^3} \cdot \underbrace{\sin x}_{???} \cdot \underbrace{(-\sin x)\, dx}_{dt}$$

kłopot, podstawienie nie działa

spróbujmy z $t = \sin x$

$dt = \cos x \, dx$

$$\int \cos^3 x \sin^2 x \, dx = \int \underbrace{\cos^2 x}_{1-t^2} \, \underbrace{\sin^2 x}_{t^2} \cdot \underbrace{\cos x \, dx}_{dt} = \int (1-t^2) t^2 \, dt = \int (t^2 - t^4)\, dt =$$

$$= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

• Podstawienie $t = \operatorname{tg} x$. Działa, gdy mamy $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \operatorname{tg} x)\, dx$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1 \longrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1}$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{(\sin^2 x + \cos^2 x)} \overset{:\cos^2 x}{\underset{:\cos^2 x}{=}} \frac{1}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{1}{t^2+1}$$

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{t^2}{t^2+1}$$

$$t = \operatorname{tg} x$$

$$dt = (\operatorname{tg}^2 x + 1)\, dx$$

$$dt = (t^2+1)\, dx$$

$$\boxed{\frac{dt}{t^2+1} = dx}$$

N1.

$$\int \frac{\sin^2 x}{\operatorname{tg}x + 3}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg}x \\ \sin^2 x = \dfrac{t^2}{t^2+1} \\ dx = \dfrac{dt}{t^2+1} \\ \cancel{\operatorname{tg}x = t} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{t^2}{t^2+1}}{t+3}\,\frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \int \frac{t^2}{(t^2+1)^2(t+3)}\,dt = \ldots$$ rozkład na ułamki proste

Po prawdzie wystąpi tam ułamek postaci $\dfrac{At+B}{(t^2+1)^2}$, a takich ułamków nie omawialiśmy.

Prostszy przykład, z którym byśmy sobie poradzili:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{tg}x + 3} = \int \frac{dt}{(t+3)(t^2+1)} = \int \left(\frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2+1} \right) dt$$

- Podstawienie $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ — uniwersalne. $\int \dots dx =$

$$dt = \left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1\right)\cdot\frac{1}{2}\,dx = \left(t^2+1\right)\cdot\frac{1}{2}\,dx$$

$$\boxed{dx = \frac{2}{t^2+1}\,dt}$$

$$\sin x = \sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2t}{t^2+1}$$

$$\cos x = \cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2t}{t^2+1}\cdot\frac{1+t^2}{1-t^2} = \frac{2t}{1-t^2} \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{1-t^2}{2t}$$

Np.

$$\int \frac{dx}{3-\cos x} = \left| \begin{array}{l} t = tg\frac{x}{2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{1}{3-\frac{1-t^2}{1+t^2}} \; \frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{2 \quad dt}{3(1+t^2)-(1-t^2)} = \int \frac{2dt}{4t^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\;\frac{1}{\frac{1}{2}}\int \frac{dt}{2t^2+1} = \int \frac{dt}{(\sqrt{2}t)^2+1} = \left| \begin{array}{l} y = \sqrt{2}\,t \\ dy = \sqrt{2}\,dt \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\,dy = dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\,dy}{y^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\operatorname{arctg} y + C = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}\,\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\cdot tg\frac{x}{2}\right) + C}$$

$\int \cos^m x \sin^n x \, dx$

- jeśli m jest nieparzyste, to działa podstawienie $t=\sin x$ np. $\int \cos^3 x \sin^5 x \, dx$
- jeśli n — || — — || — $t=\cos x$ — || —
- jeśli m, n są parzyste, to przekształcamy f. podcałkową:

1) $$\left.\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ 1 &= \cos^2 x + \sin^2 x \end{aligned}\right\} + : 1+\cos 2x = 2\cos^2 x \rightarrow \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\int \cos^n x \sin^m x \, dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^{\frac{n}{2}} dx$$

Np.

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = (*)$$

$$\cos^2 y = \frac{1+\cos 2y}{2}$$

$$\underline{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1-\cos^2 2x}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2 2x =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x = \underline{\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x}$$

I teraz:

$$(*) = \int \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x\right) dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x + C = \underline{\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C}$$

$$(\sin 4x)' = 4\cos 4x$$

2) Używamy wzorów Eulera: $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

$$\cos^2 x \sin^2 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 =$$

$$= \frac{e^{2ix}+2+e^{-2ix}}{4} \cdot \frac{e^{2ix}-2+e^{-2ix}}{-4} =$$

$$= \frac{e^{4ix} - \cancel{2e^{2ix}} + 1 + \cancel{2e^{2ix}} - 4 + \cancel{2e^{-2ix}} + 1 - \cancel{2e^{-2ix}} + e^{-4ix}}{-16} =$$

$$= \frac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{-16} + \frac{-2}{-16} = \underline{-\frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{8}}$$