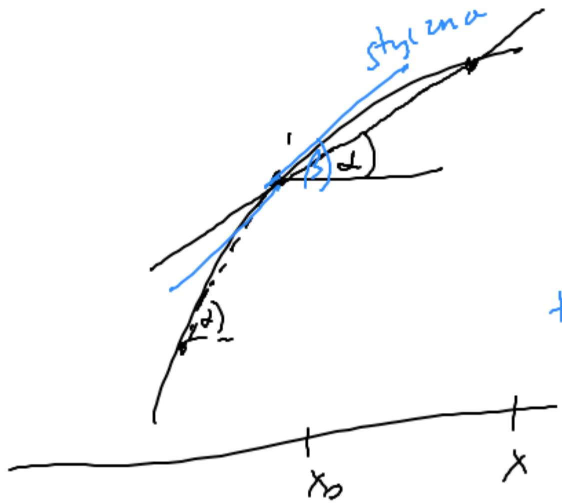
$$f:(a,b)\to\mathbb{R} \longrightarrow f'$$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$



$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$\operatorname{tg}\beta=f'(x_0)$$

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$$

$$(f(x)-g(x))'=f'(x)-g'(x)$$

$$(f(x)g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

jeśli prawa strona jest dobrze określona, to pochodna po lewej stronie istnieje i mamy równość

Wp

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{x^3 \sin x}{\arccos x + 1}\right)' = \frac{\boxed{(x^3 \sin x)'}\,(\arccos x + 1) - x^3 \sin x \cdot \boxed{(\arccos x + 1)'}}{(\arccos x + 1)^2}$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$(x^3 \cdot \sin x)' = (x^3)' \sin x + x^3 (\sin x)' =$$
$$= \boxed{3x^2 \sin x + x^3 \cos x}$$

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(\arccos x + 1)' = (\arccos x)' + 1' = \boxed{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + 0}$$

$$(x^n)' = n x^{n-1} \qquad (n \in \mathbb{R})$$
parametr

$$(c)' = 0 \qquad c = \text{const.}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (a > 0$$ parametr)

w szczególności:

$$(e^x)' = e^x \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\cos x)' = -\sin x \qquad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\left(2^{\sqrt{2}\sin^2 x}\right)' = \underline{2^{\sqrt{2}\sin^2 x}\cdot \ln 2}\cdot\left(\sqrt{2}\sin^2 x\right)' = 2^{\sqrt{2}\sin^2 x}\cdot \ln 2\cdot\sqrt{2}\,\underline{\left(\sin^2 x\right)'}$$

$f(y) = 2^y \quad \underline{f'(y)} = 2^y \ln 2$

$y(x) = \sqrt{2}\sin^2 x$

$f(y(x))' = \underline{f'(y(x))}\cdot y'(x)$

$(c f(x))' = c\cdot f'(x)$

$c = \text{const.}$

$(fg)' = f'g + fg'$

1) $(\sin^2 x)' = (\sin x\cdot\sin x)' = (\sin x)'\cdot\sin x + \sin x\cdot(\sin x)' = 2\sin x\cos x$

2) $(\sin^2 x)' = \left((\sin x)^2\right)' = \underbrace{2\sin x}_{f'(y(x))}\cdot\underbrace{\cos x}_{y'(x)}$

$f(y) = y^2 \quad f'(y) = 2y$

$y(x) = \sin x$

Zastosowania: • badanie funkcji; znajdowanie ekstremów lokalnych, wartości najmniejszych i największych

znajdowanie przedziałów monotoniczności

• reguła de L'Hôspitala

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \underset{\left(\frac{0}{0}\right) \text{ lub } \left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)}{\overset{H}{=}} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$ ← jeśli istnieje, to mamy równość

Np.

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{e^x - e^\pi} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{H}{=}} \lim_{x\to\pi} \frac{(\sin x)'}{(e^x - e^\pi)'} = \lim_{x\to\pi} \frac{\cos x}{e^x - 0} = \frac{\cos\pi}{e^\pi} = \frac{-1}{e^\pi} = -e^{-\pi}$$

Granica po prawej istnieje, a więc „$\overset{H}{=}$” jest istotnie równością.

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $-\infty\le a<b\le\infty$

$$\int f(x)\,dx = F(x)+c \quad \text{, gdzie} \quad F'(x)=f(x)$$
— czyli F jest pewną funkcją pierwotną funkcji f

$$= \{F+c : c\in\mathbb{R}\}$$

np. zwykle piszemy
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|+c$$
$\Leftarrow$ prawda na $(-\infty,0)$ lub $(0,\infty)$

~~dokładniej może poprawniej pisać (?)~~

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \begin{cases} \ln|x|+c_1, & x<0 \\ \ln|x|+c_2, & x>0 \end{cases}$$

Jeśli $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła, $F'(x)=f(x)$ dla $x\in(a,b)$ i F – też ciągła na $[a,b]$,

to
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(x)\Big|_a^b$$

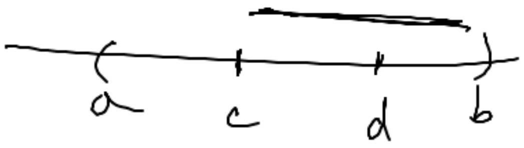
Uwaga:

Niech $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, ustalmy $c \in [a,b)$, niech $F'(x) = f(x)$ dla $x \in (a,b)$

$$\int_c^d f(x)\,dx = F(d) - F(c) \qquad d \in (c,b)$$

$\downarrow$

$$F(\underset{y}{d}) = F(c) + \int_c^{d\;y} f(x)\,dx$$

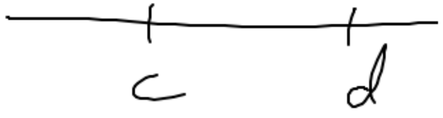


$\Rightarrow$ funkcja $g(y) = \int_c^y f(x)\,dx$, $y \in (c,b)$ jest funkcją pierwotną f

$\rightarrow$ bo $g(y) = F(y) - F(c)$, stąd $g'(y) = F'(y) - (F(c))' = f(y)$

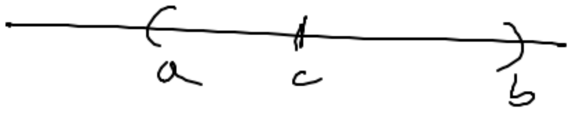
Przyjmiemy konwencję, że jeśli $c<d$, to

$$\int_d^c f(x)\,dx = -\int_c^d f(x)\,dx = -\big(F(d)-F(c)\big) = F(c)-F(d)$$



$$\int_c^c f(x)\,dx := F(c)-F(c) = 0$$

Wtedy wzór:



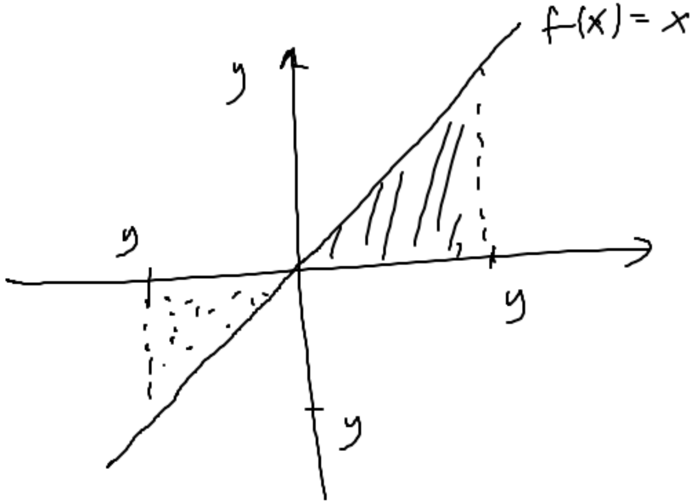
$$g(y) = \int_c^y f(x)\,dx \qquad , y\in(a,b)$$

określa pewną funkcję pierwotną funkcji f na (a,b), tzn. $g'(y)=f(y)$

Np.

$$\int_0^y \underbrace{x}_{f(x)=x}\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^y = \frac{y^2}{2} - 0 = \frac{y^2}{2}$$

$$\left(\frac{y^2}{2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot 2y = y = f(y)$$ — oczywiście $y \mapsto \frac{y^2}{2}$ jest f. pierwotną f. podcałkowej $f(y)=y$



$$g(y) = \int_{y_0}^{y} f(x)\,dx$$ — f. górnej granicy całkowania

$$\Rightarrow \quad g'(y) = f(y)$$

№

$$\left(\int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt\right)' = g'(x^2)\cdot(x^2)' = e^{-x^4}\cdot 2x$$

$f(x) = g(x^2)$, где $g(y) = \int_0^{y} e^{-t^2}\,dt$

$$g'(y) = e^{-y^2}$$

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int (f(x)-g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$$

$$\int \left(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right)dx = \int \left(f(x)\cdot g(x)\right)'\,dx = f(x)\,g(x) + C$$

$$\Downarrow$$

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)\,g(x) + \cancel{C} - \int f(x)\,g'(x)\,dx$$

← całka przez części

jest i tak tutaj

$$\cancel{\int f(x)\,g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx}$$

NIE!

$$\int f(\varphi(y))\,\varphi'(y)\,dy = F(\varphi(y)) + c \quad , \text{gdzie} \quad F(x)_{+c} = \int f(x)\,dx$$

całk. przez podstawienie

Np.

$$\int \sin^4 y \underbrace{\cos y\,dy} = \left| \begin{array}{l} t = \sin y \\ dt = \underbrace{\cos y\,dy} \end{array} \right| = \int t^4\,dt = \frac{t^5}{5} + c =$$

$$= \frac{1}{5}\sin^5 y + c$$

Np.

$$\int f'g = fg - \int fg'$$

$$\int e^{2x}\cdot \sin x\,dx = \int e^{2x}\cdot(-\cos x)'\,dx = e^{2x}\cdot(-\cos x) - \int (e^{2x})'\cdot(-\cos x)\,dx =$$

$$= -e^{2x}\cos x + \int e^{2x}\cdot 2\cdot\cos x\,dx = -e^{2x}\cos x + 2\cdot\int e^{2x}\cdot(\sin x)'\,dx =$$

$$= -e^{2x}\cos x + 2\left[e^{2x}\sin x - \int (e^{2x})'\sin x\,dx\right] =$$

$$= -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x - 2\int e^{2x}\cdot 2\sin x\,dx = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x - 4\int e^{2x}\sin x\,dx$$

$$\Rightarrow 5\int e^{2x}\sin x\,dx = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x + c \qquad \tilde{c} = \frac{c}{5}$$

$$\boxed{\int e^{2x}\sin x\,dx = -\frac{1}{5}e^{2x}\cos x + \frac{2}{5}e^{2x}\sin x + \tilde{c}}$$

Np.

$$\int_0^{\pi} e^{2x}\sin x\,dx = \left(-\frac{1}{5}e^{2x}\cos x + \frac{2}{5}e^{2x}\sin x\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{5}e^{2\pi}\cdot(-1) + \frac{1}{5}e^{0}\cdot 1 = \frac{1}{5}e^{2\pi} + 1/5$$

Nf:

$$\int x\cdot \sin x \, dx = \int x(-\cos x)' \, dx = -x\cos x - \int (x)' \cdot (-\cos x)\, dx =$$

$$= -x\cos x + \int \cos x \, dx = \underline{-x\cos x + \sin x + C}$$

Ale:

$$\int x \sin x \, dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \sin x \, dx = \frac{x^2}{2}\sin x - \int \frac{x^2}{2}(\sin x)' \, dx = \frac{x^2}{2}\sin x - \underline{\int \frac{x^2}{2}\cos x \, dx}$$

$$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx$$

1) Spr. czy funkcja wymierna jest właściwa: stopień licznika $= 0 < 4 =$ st. mianownika – jest (Dzielenie nie jest potrzebne)

2) rozkład mianownika na czynniki nierozkładalne

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

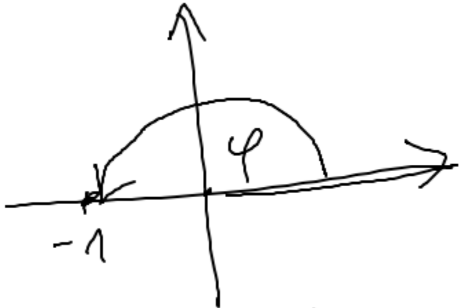
I $\quad x^4+1 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 =$

$$= \underbrace{(x^2+1-\sqrt{2}x)}\underbrace{(x^2+1+\sqrt{2}x)}$$

nierozkładalne $(\Delta < 0)$ $\qquad \Delta = 2-4 = -2 < 0$

albo bo funkcja $f(x)=x^4+1$ nie ma pierwiastków rzeczywistych

II $x^4+1=0$ – rozwiązujemy w liczbach zespolonych



$$x^4 = -1 = 1\cdot(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$x^4 = 1\cdot(\cos\pi + i\sin\pi)$$

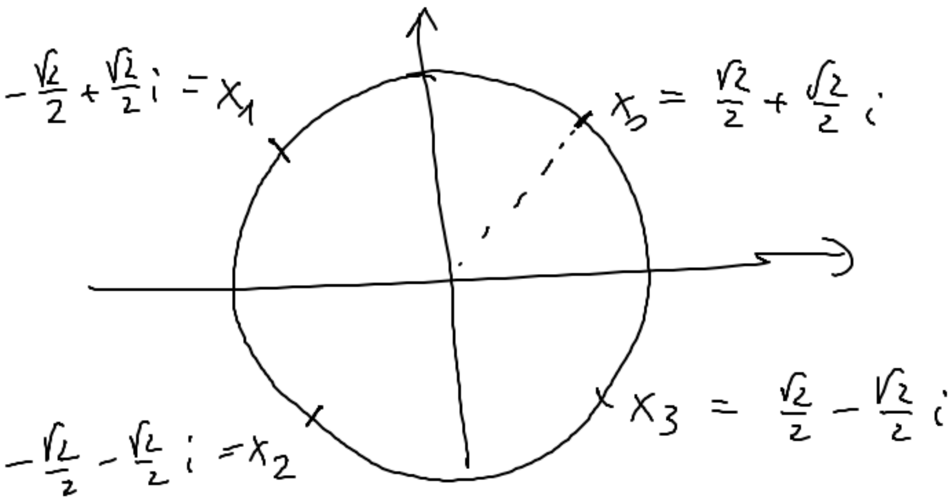
$\rightarrow$ pierwiastki są postaci $x_k = \sqrt[4]{1}\cdot\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)$, $k=0,1,2,3$

$$x_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$$

$$x_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$$

$$x_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}$$

$$x_3 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}$$



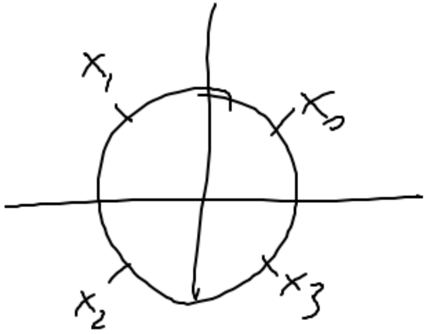
$$\Rightarrow 1\cdot x^4+1 = 1(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

$$x^4+1 = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) =$$

$$= (x-x_0)(x-\overline{x_0}) \cdot (x-x_1)(x-\overline{x_1}) =$$

$$= \left(x^2-(x_0+\overline{x_0})x + x_0\overline{x_0}\right)\left(x^2-(x_1+\overline{x_1})x + x_1\overline{x_1}\right) =$$

$$= \left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)$$



$$x_3 = \overline{x_0}$$

$$x_2 = \overline{x_1}$$

$$x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

$$\overline{x_0} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

$$x_0 \cdot \overline{x_0} = |x_0|^2 = 1$$

3) Rozkład na ułamki proste

a) Skąd

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

$$= \frac{(Ax+B)(x^2+\sqrt{2}x+1) + (Cx+D)(x^2-\sqrt{2}x+1)}{x^4+1} =$$

$$= \frac{(A+C)x^3 + (\sqrt{2}A+B-\sqrt{2}C+D)x^2 + (A+B\sqrt{2}+C-D\sqrt{2})x + (B+D)}{x^4+1}$$

b) układ równań na współczynniki:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ \sqrt{2}A+B-\sqrt{2}C+D=0 \\ A+B\sqrt{2}+C-D\sqrt{2}=0 \\ B+D=1 \end{cases}$$

$A+B\sqrt{2}+C-D\sqrt{2}=0 \Rightarrow B\sqrt{2}-D\sqrt{2}=0 \Rightarrow B-D=0$

$\sqrt{2}A-\sqrt{2}C=-1$

$A-C=\frac{-1}{\sqrt{2}}$

$2A=-\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \boxed{A=\frac{-1}{2\sqrt{2}} \quad C=\frac{1}{2\sqrt{2}}}$

$2B=1$

$\boxed{B=1/2 \quad D=1/2}$

Lösung

$$\int \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\,dx = \int \frac{-\frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot (2x - \sqrt{2}) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\,dx =$$

$$(x^2 - \sqrt{2}x + 1)' = 2x - \sqrt{2}$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \underbrace{\int \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\,dx}_{} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$$

$$t = x^2 - \sqrt{2}x + 1$$

$$dt = (2x - \sqrt{2})\,dx$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int \frac{dx}{2\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1} =$$

$$\boxed{\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \operatorname{arctg} t + c}$$

$$= \sqrt{2} \int \frac{\sqrt{2}\,dx}{\left(\sqrt{2}x-1\right)^2+1} = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{2}x-1 \\ dt = \sqrt{2}\,dx \end{array} \right| = \sqrt{2} \int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \sqrt{2}\, \operatorname{arctg}(t) + c = \underline{\sqrt{2} \cdot \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}x-1\right) + c}$$