Oblicz pochodną

$$\left(\frac{x^4+1}{\sin^3(x)}\right)' = \frac{(x^4+1)'\sin^3(x) - (x^4+1)\cdot(\sin^3(x))'}{\sin^6(x)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(x^4+1)' = 4x^3 + 0$$

$$= 4x^4 + 1$$

$$(\sin^3 x)' = 3\sin^2 x \cdot \cos x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x \, dx = \frac{\sin^4 x}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin^4\frac{\pi}{2} - \sin^4 0}{4} = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\int \sin^3 x \cos x \, dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{array} \right| = \int t^3 \, dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{(x-\frac{\pi}{2})^2} \overset{H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos^2 x)'}{((x-\frac{\pi}{2})^2)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos x\cdot(-\sin x)}{2(x-\frac{\pi}{2})}$$

Całkowanie przez części dla całek oznaczonych:

$$\int_a^b f'g\,dx = fg\Big|_a^b - \int_a^b fg'\,dx$$

Np.

$$\int_0^1 xe^{-x}\,dx = \int_0^1 x\cdot(-e^{-x})'\,dx =$$

$$= x\cdot(-e^{-x})\Big|_0^1 - \int_0^1 (x)'(-e^{-x})\,dx =$$

$$= 1\cdot(-e^{-1}) - 0 + \int_0^1 e^{-x}\,dx = \frac{-1}{e} - \left(e^{-x}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{-1}{e} - \left(\frac{1}{e} - 1\right) = \underline{1 - \frac{2}{e}}$$

$$\int e^{-x}\,dx = \left|\begin{array}{l} t=-x \\ dt=-dx \\ -dt=dx \end{array}\right| =$$

$$= -\int e^{t}\,dt =$$

$$= -e^{t}+c = -e^{-x}+c$$

Można też policzyć najpierw $\int f'g\,dx = \ldots$ (nieoznaczoną) i potem użyć jej do obliczenia $\int_a^b \ldots$

Całkowanie przez podstawienie dla całek oznaczonych

$$\int_0^1 x e^{-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = -x^2 \\ dt = -2x\,dx \\ -\frac{1}{2}dt = x\,dx \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int_0^{-1} e^t\,dt = \cancel{\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} e^t\,dt}$$

x	0	1
$t=-x^2$	0	-1

tego nie ma dla całek nieozn.

nieoznaczone:
podobnie, ale

$$= -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

$$= -\frac{1}{2}e^t \Big|_0^{-1} = -\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}e^0 = 1 - \frac{1}{2e}$$

różnica: nie wracamy do starych zmiennych, ale za to zmieniamy granice całkowania

Można też najpierw zamienić zmienne w całce nieoznaczonej, a potem użyć jej do obliczenia całki oznaczonej.

Zastosowania całek oznaczonych

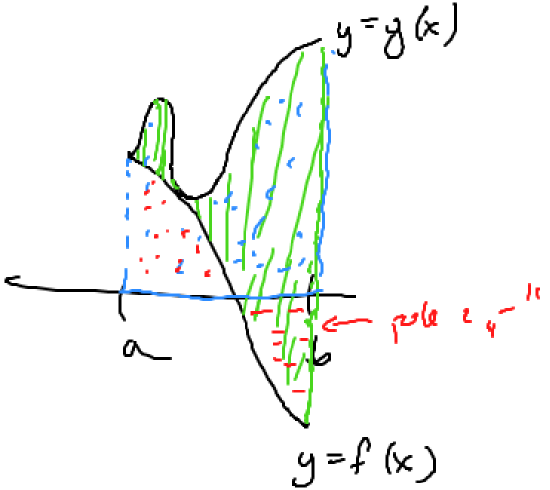
· obliczanie pól:

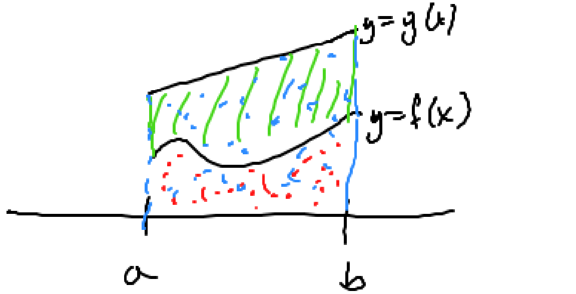
Jeśli $f(x) \le g(x)$ dla $x \in [a,b]$, to

$$\text{pole}\left(\{(x,y) : f(x) \le y \le g(x),\ x \in [a,b]\}\right) =$$

$$= \int_a^b \left(g(x) - f(x)\right) dx$$

$$= \underbrace{\int_a^b g(x)\, dx}_{\text{pole (zamalowane)}} - \int_a^b f(x)\, dx$$

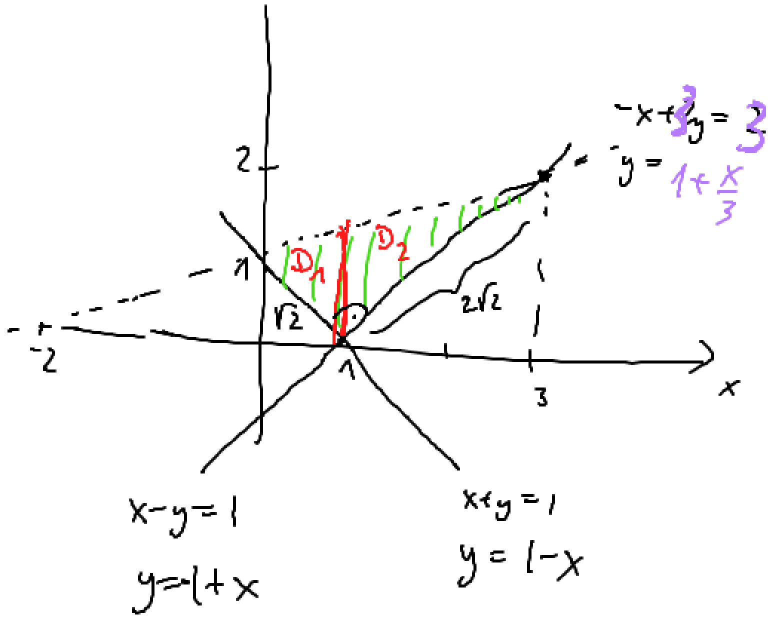




Nr. Oblicz pole obszaru ograniczonego prostymi

$P_{\triangle} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} = 2$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ -x+3y=3 \quad \longrightarrow \quad 3y = 3 + x \ \rightarrow \ y = 1+\frac{x}{3} \\ x-y=1 \end{cases}$$



$$Pole = |D_1| + |D_2| = \int_0^1 \left(1+\frac{x}{3} - (1-x)\right) dx \ +$$

$$+ \int_1^3 \left(1+\frac{x}{3} - (-1+x)\right) dx =$$

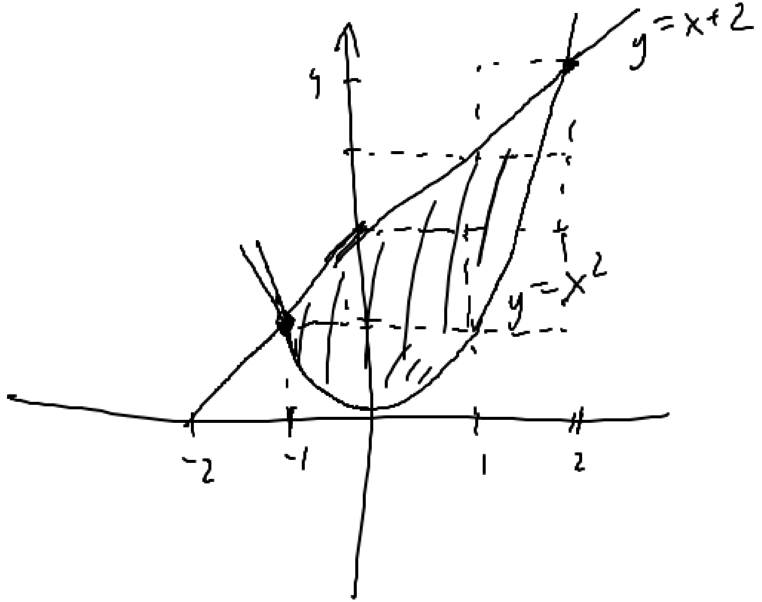
$$= \int_0^1 \frac{4}{3} x \, dx + \int_1^3 \left(2 - \frac{2x}{3}\right) dx = \frac{4}{3}\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \left(2x - \frac{2}{3}\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^3 =$$

$$= \frac{2}{3} - 0 + \left(6 - \frac{9}{3} - \left(2 - \frac{1}{3}\right)\right) = \cancel{\frac{3}{4} + \left(4 - \frac{8}{4}\right) = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}}$$

$$= \frac{2}{3} + 4 - 3 + \frac{1}{3} = 1 + 1 = 2$$

Nr 1. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$$



znajdujemy p. przecięcia:

$x^2 = x + 2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$\Delta = 1 + 8 = 9$

$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \qquad x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$

$y = 1 \qquad\qquad y = 4$

$(-1,1) \qquad\qquad (2,4)$

$$\text{Pole} = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\,dx =$$

$$-\frac{9}{6} \quad +\frac{2}{6}$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \left(\frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{20}{6} + \frac{7}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

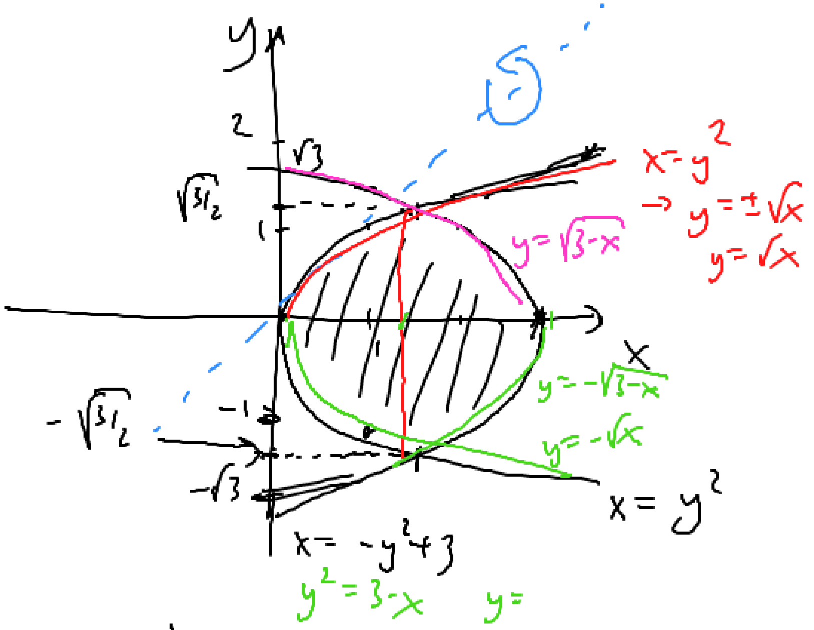
Pole obszaru ogr. krzywymi

$$\begin{cases} y^2 = x \\ x = -y^2+3 \end{cases}$$

Są zamienione role x i y:

$$\text{pole} = \int_{-\sqrt{3/2}}^{\sqrt{3/2}} \left(-y^2+3-y^2\right) dy =$$

$$= \int_{-\sqrt{3/2}}^{\sqrt{3/2}} \left(3-2y^2\right) dy = \left(3y - 2\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-\sqrt{3/2}}^{\sqrt{3/2}} = \dots$$



$$\begin{cases} y^2 = x \\ x = -y^2+3 \end{cases}$$

$$y^2 = -y^2+3$$

$$2y^2 = 3$$

$$y^2 = 3/2$$

$$y = \pm\sqrt{3/2}$$

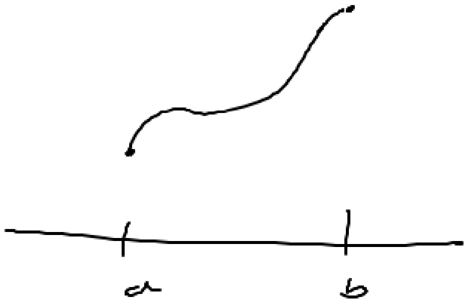
Uwaga: pole obszaru nie zmieni się, jeśli zamienimy x i y:

$$\begin{cases} x^2 = y \\ y = -x^2+3 \end{cases}$$

$$\int_{-\sqrt{3/2}}^{\sqrt{3/2}} \left(-x^2+3-x^2\right) dx = \dots$$

Zastosowania całek oznaczonych — cd.

- obliczanie długości krzywych:



krzywa $\{(x, f(x));\ x \in [a,b]\}$

ma długość $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

Np. ćwiartka okręgu jednostkowego ma długość l,

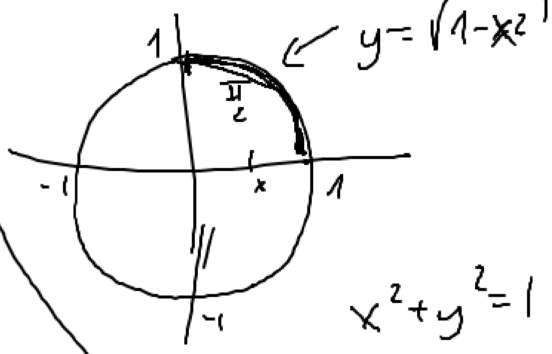
$$f(x)=\sqrt{1-x^2}, \quad x\in[0,1]$$

$\cancel{f'(x)=}$ $(\sqrt{y})' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(1-x^2)' = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$l=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,dx = \int_0^1\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx = \int_0^1\sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}}\,dx = \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \arcsin x\Big|_0^1 = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$



$$x^2+y^2=1$$
$$y^2=1-x^2$$
$$y=\pm\sqrt{1-x^2}$$

• objętości i pola brył obrotowych:

Niech $y = f(x) \geq 0$ dla $x \in [a,b]$

Rozważamy bryłę obrotową powstałą przez obrót obszaru

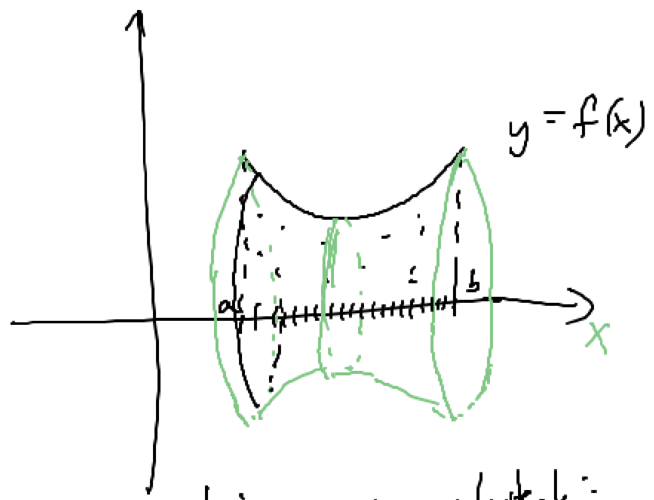
$$\{(x,y):\ 0 \leq y \leq f(x),\ x \in [a,b]\}$$

wokół Ox.

Objętość tej bryły $= \int_a^b \pi f^2(x)\,dx$

pole powierzchni powstałej przez obrót $\{(x, f(x)):\ x \in [a,b]\}$

$$= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$



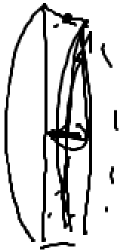
Kroimy na plasterki:

plasterek $[x_{k-1}, x_k]$

jest zbliżony do walca

o wysokości $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

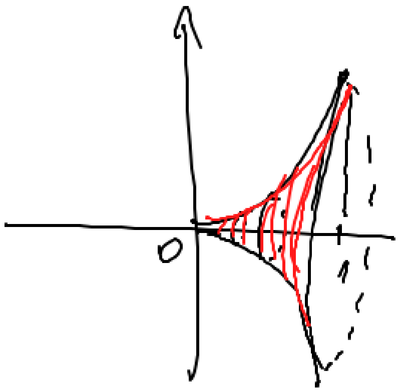
i promieniu $f(x_k)$



przybl. obj. $= \sum_{k=1}^{n} \pi f(x_k)^2 \cdot \Delta x_k$

Np.

Obracamy $y=x^2$, $x\in[0,1]$ wokół osi Ox.



Jaka jest objętość ~~bryły~~ powstałego bąka?

$$V=\int_0^1 \pi\left(x^2\right)^2dx=\pi\int_0^1 x^4dx=\pi\frac{x^5}{5}\Big|_0^1=\frac{\pi}{5}$$

Jakie jest pole otrzymanej powierzchni?

$$P=2\pi\int_0^1 x^2\cdot\sqrt{1+\left[\left(x^2\right)'\right]^2}\,dx=2\pi\int_0^1 x^2\sqrt{1+4x^2}\,dx=\ldots$$