Wzór Taylora

$$f'' = (f')'$$

Zał. $f: (x_0-\delta, x_0+\delta) \to \mathbb{R}$ ma pochodne do rzędu n włącznie, $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$.

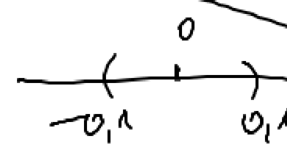
Wtedy istnieje c pomiędzy x_0 a x t.że

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}}_{\text{wielomian Taylora rzędu } n-1} + \underbrace{\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n}_{\text{reszta rzędu } n,\ R_n(x)}.$$

$(n=4)$

Zadanie: $f(x) = \cos^2 x \approx 1 - x^2$ dla $|x| \le 0{,}1$, oszacować dokładność.

Rozw. Napiszemy wzór Taylora dla f i $x_0 = 0$



$f(x) = \cos^2 x \qquad f(x_0) = f(0) = 1$

$f'(x) = 2\cos x \cdot (\cos x)' = -2\cos x \sin x = -\sin 2x, \quad f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos 2x \cdot 2 \qquad f''(0) = -2$

$f'''(x) = \sin 2x \cdot 4 \qquad f'''(0) = 0$

$f^{IV}(x) = \cos 2x \cdot 8 \qquad f^{IV}(c) = 8\cos 2c$

$$\Rightarrow \boxed{\cos^2 x = \underbrace{1 + 0 + \frac{-2}{2!}x^2 + 0}_{} + \frac{8\cos 2c}{4!}x^4}$$

$$\cos^2 x = 1 - x^2 + \frac{\cos 2c}{3} \cdot x^4$$

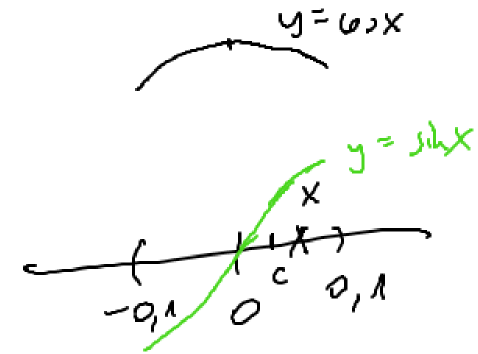
$$\cos^2 x = 1 - x^2 + \frac{\cos 2c}{3} \cdot x^4$$

$x \in \mathbb{R}$, c – punkt pomiędzy 0 a x

Jeśli pominiemy ostatni składnik, otrzymamy wzór przybliżony

$$\cos^2 x \approx 1 - x^2 ,$$

z błędem bezwzględnym równym $\frac{\cos 2c}{3} x^4$.



Dla $|x| \le 0{,}1$ możemy oszacować ten błąd:

$$|\text{błąd bezwzgl.}| \le \frac{|\cos 2c|}{3} \cdot |x|^4 \le \frac{1}{3} \cdot (0{,}1)^4 = \frac{0{,}0001}{3}$$

$|\sin x| \le |x|$

Inne przybliżenie: bierzemy $n=3$ (reszta z $n=3$):

$$\cos^2 x = 1 - x^2 + \frac{f'''(c)}{3!} x^3 = 1 - x^2 + \frac{4 \sin 2c}{6} x^3 = 1 - x^2 + \frac{2 \sin 2c}{3} x^3$$

, $x \in \mathbb{R}$, c – pomiędzy 0 a x

$\Rightarrow$ $\cos^2 x \approx 1 - x^2$ z błędem bezwzgl. $\frac{2 \sin 2c}{3} x^3$,

$$|\text{błąd bezwzgl.}| \le \frac{|2 \sin 2c|}{3} |x|^3 \le \frac{2}{3} \sin 0{,}2 \cdot (0{,}1)^3 \le \frac{2}{3} \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}001 = \frac{0{,}0004}{3}.$$

Rozwinięcie (wzór) Taylora z $x_0 = 0$ nazywa się rozwinięciem (wzorem) Maclaurina

Wzory Maclaurina dla exp i cos:

$$\exp(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^c \cdot x^n}{n!}$$, c - pomiędzy 0 a x

np. dla cos i $n=5$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{\cos c}{5!} x^5$$ —"—

Ćwiczenie

$f(x) = x^2$ Napiszemy wzór Taylora dla $\underline{x_0 = 1}$ i $n=4$.

$f'(x) = 2x$

$f''(x) = 2$

$f'''(x) = 0$

$f^{IV}(x) = 0$

$$x^2 = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{f^{IV}(c)}{4!}(x-x_0)^4 =$$

$$= 1 + 2(x-1) + (x-1)^2 + 0 + 0 =$$

$$= \underline{1 + 2(x-1) + (x-1)^2}$$

spr. $1 + 2(x-1) + (x-1)^2 = 1 + 2x - 2 + x^2 - 2x + 1 = x^2$ ✓

Wypukłość i wklęsłość funkcji

Def. Niech $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ma pochodne do drugiego rzędu włącznie, $-\infty \le a < b \le \infty$.

- Jeśli $f''(x) > 0$ dla $x \in (a,b)\setminus S$, gdzie $S \subset (a,b)$ jest zbiorem skończonym, to mówimy, że f jest <u>wypukła</u> na (a,b)
- Jeśli $f''(x) < 0$ dla $x \in (a,b)\setminus S$, gdzie $S \subset (a,b)$ jest zbiorem skończonym, to mówimy, że f jest <u>wklęsła</u> na (a,b).

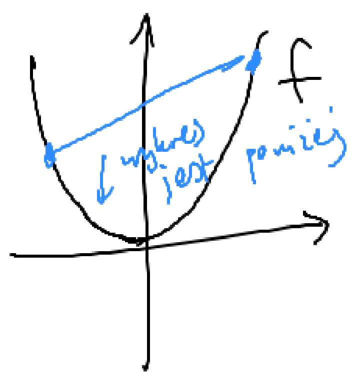
Np.:

$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

$f''(x) = 2 > 0$

$\to f$ jest wypukła na $\mathbb{R}$

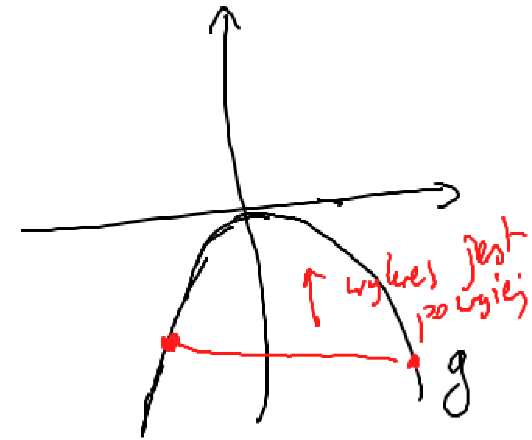


$g(x) = -x^2$

$g'(x) = -2x$

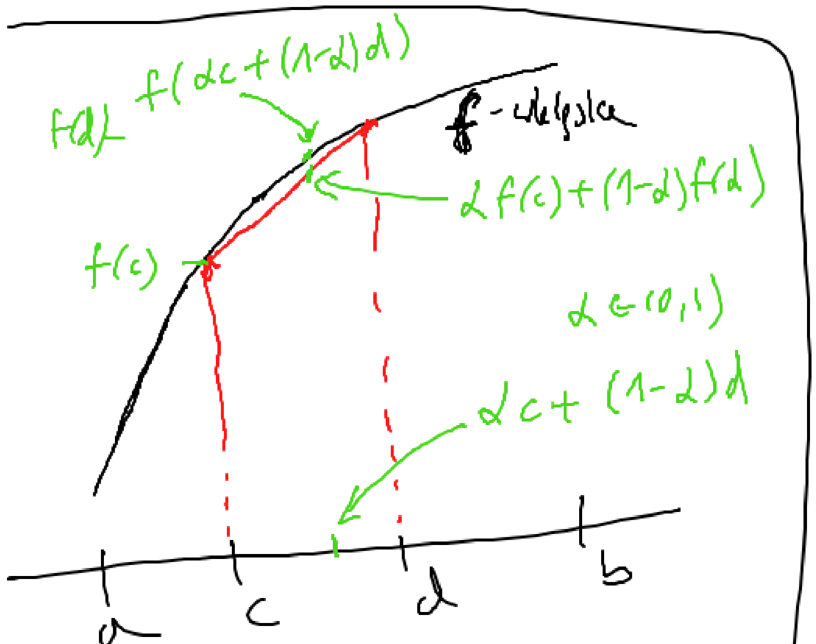
$g''(x) = -2 < 0$

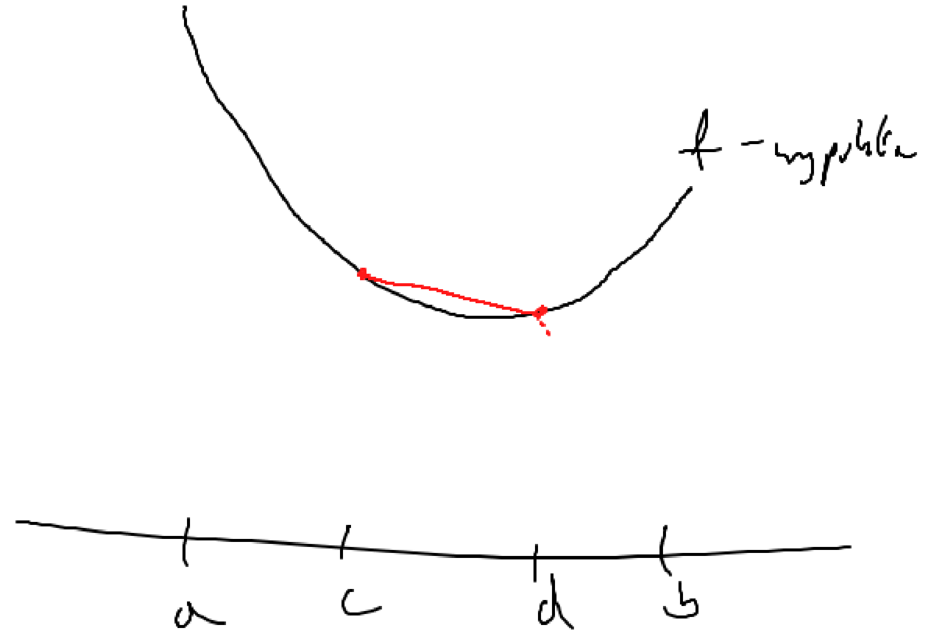
g jest wklęsła na $\mathbb{R}$



Uwaga.

Jeśli $f:(a,b)$ jest wypukła, (wklęsła) $a<c<d<b$, to na odcinku (c,d) wykres f leży poniżej (powyżej, odpowiednio) odcinka łączącego punkty $(c,f(c))$ i $(d,f(d))$.





$\Rightarrow f(\alpha c+(1-\alpha)d) > \alpha f(c)+(1-\alpha)f(d)$ (nierówność Jensena)

dla f - wklęsłej, $\alpha\in(0,1)$, $a<c<d<b$

Przykład

$$\int \frac{dx}{5-\cos x-2\sin x} = \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{5-\frac{1-t^2}{1+t^2}-2\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{2\,dt}{5(t^2+1)-(1-t^2)-4t} =$$

$$= \int \frac{2\,dt}{6t^2-4t+4} = \int \frac{dt}{3t^2-2t+2}$$

~~$t=\sin x$~~ ~~nie działają~~

~~$t=\cos x$~~

~~$t=\operatorname{tg} x$ – gdy f. zależy od $\operatorname{tg} x$, $\cos^2 x$, $\sin^2 x$~~

$$(\operatorname{tg} y)' = \operatorname{tg}^2 y + 1$$

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} \longrightarrow dt = \left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right)\cdot\frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}(t^2+1)\,dx$$

$$dx = \frac{2\,dt}{t^2+1}$$

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} \quad \frac{:\cos^2\frac{x}{2}}{:\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} \quad \frac{:\cos^2\frac{x}{2}}{:\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\int \frac{dt}{3t^2-2t+2} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2-\frac{2}{3}t+\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}+\frac{2}{3}} =$$

$$\int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \operatorname{arctg} y + C$$

$$\Delta = 4-4\cdot 2\cdot 3<0$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{9}} = \frac{1}{3\cdot\frac{5}{9}}\int \frac{dt}{\frac{9}{5}\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{3}{5}\int \frac{dt}{\left[\frac{3}{\sqrt{5}}\left(t-\frac{1}{3}\right)\right]^2+1} = \left|\begin{array}{l} y=\frac{3}{\sqrt{5}}\left(t-\frac{1}{3}\right) \\ dy=\frac{3}{\sqrt{5}}\,dt \\ dt=\frac{\sqrt{5}}{3}\,dy \end{array}\right| = \frac{3}{5}\int \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}\,dy}{y^2+1} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{arctg} y + C = \frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{5}}\left(t-\frac{1}{3}\right)+C = \underline{\frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\right)\right)+C}$$

$$\int \sin 3x \cos 5x \, dx$$

Przypomnienie: metoda działa dla $\int e^{ax} \sin bx \, dx$, $\int e^{ax} \cos bx \, dx$, $\int \cos ax \sin bx \, dx$, $\int \sin ax \sin bx \, dx$, $\int \cos ax \cos bx \, dx$

I per partes (2x): $\int f'g = fg - \int fg'$

$$\int \sin 3x \cos 5x \, dx = \int \left(-\frac{\cos 3x}{3}\right)' \cdot \cos 5x \, dx = -\frac{\cos 3x}{3} \cos 5x - \int \left(-\frac{\cos 3x}{3}\right) \cdot \left(-\sin 5x \cdot 5\right) dx =$$

$$= -\frac{1}{3} \cos 3x \cos 5x - \frac{5}{3} \int \cos 3x \cdot \sin 5x \, dx = -\frac{1}{3} \cos 3x \cos 5x - \frac{5}{3} \int \left(\frac{\sin 3x}{3}\right)' \sin 5x \, dx =$$

$$= -\frac{1}{3} \cos 3x \cos 5x - \frac{5}{3} \left[\frac{\sin 3x}{3} \sin 5x - \int \frac{\sin 3x}{3} \cdot \cos 5x \cdot 5 \, dx\right] =$$

$$= -\frac{1}{3} \cos 3x \cos 5x - \frac{5}{9} \sin 3x \sin 5x + \frac{25}{9} \int \sin 3x \cos 5x \, dx \qquad \Big| - \frac{25}{9} \int \sin 3x \cos 5x \, dx$$

$$-\frac{16}{9} \int \sin 3x \cos 5x \, dx = -\frac{1}{3} \cos 3x \cos 5x - \frac{5}{9} \sin 3x \sin 5x + C$$

$$\Rightarrow \int \sin 3x \cos 5x \, dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{16} \cos 3x \cos 5x + \frac{5}{9} \cdot \frac{9}{16} \sin 3x \sin 5x + \tilde{C}$$

II tożsamości trygonometryczne

$$\sin 3x \cos 5x = \frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i} \cdot \frac{e^{5ix}+e^{-5ix}}{2} =$$

$$\sin y = \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}$$

$$\cos y = \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}$$

$$= \frac{e^{8ix}+e^{-2ix}-e^{2ix}-e^{-8ix}}{4i} =$$

$$= \underbrace{\frac{e^{8ix}-e^{-8ix}}{2 \cdot 2i}}_{= \sin 8x} + \underbrace{\frac{e^{-2ix}-e^{2ix}}{2 \cdot 2i}}_{\sin(-2x) = -\sin(2x)} = \frac{1}{2}\sin 8x - \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\Rightarrow \int \sin 3x \cos 5x \, dx = \int \left(\frac{1}{2}\sin 8x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) dx = \frac{1}{2}(-\cos 8x)\cdot\frac{1}{8} - \frac{1}{2}(-\cos 2x)\cdot\frac{1}{2} + C =$$

$$= -\frac{1}{16}\cos 8x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

$$\int e^{\sqrt{x+1}} \cdot \sqrt{x+1}\, dx = \left| \begin{array}{l} t=\sqrt{x+1} \rightsquigarrow t^2 = x+1 \rightsquigarrow 2t\,dt = dx \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot (x+1)'\, dx = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\, dx \\ 2t\,dt = dx \end{array} \right| =$$

$$\int f'g = fg - \int fg'$$

$$= \int e^t t \cdot 2t\,dt = 2\int e^t t^2 dt =$$

$$= 2\int (e^t)' t^2 dt = 2\left[e^t t^2 - \int e^t (t^2)' dt\right] = 2e^t t^2 - 2\int e^t \cdot 2t\,dt =$$

$$= 2e^t t^2 - 4\int (e^t)' \cdot t\,dt = 2e^t t^2 - 4\left[e^t t - \int e^t (t)'\,dt\right] =$$

$$= 2e^t t^2 - 4e^t t + 4\int e^t dt = 2e^t t^2 - 4e^t t + 4e^t + C =$$

$$= \boxed{2e^{\sqrt{x+1}}(x+1) - 4e^{\sqrt{x+1}} \cdot \sqrt{x+1} + 4e^{\sqrt{x+1}} + C}$$

$$\int \frac{x^2-11}{x^2-2x+1}\,dx$$

F. podcałkowa jest f. wymierną niewłaściwą (tzn. stopień licznika $\geq$ st. mianownika)

$$\begin{array}{l} \quad 1 \leftarrow \text{iloraz} \\ \hline (x^2-11) : (x^2-2x+1) \\ -(x^2-2x+1) \\ \hline \underbrace{2x-12}_{\text{reszta}} \end{array}$$

Inaczej:

$$\frac{x^2-11}{x^2-2x+1} = \frac{(x^2-2x+1)+2x-1-11}{x^2-2x+1} = 1 + \frac{2x-12}{x^2-2x+1}$$

$$\int\frac{x^2-11}{x^2-2x+1}\,dx = \int 1\,dx + \int\frac{2x-12}{x^2-2x+1}\,dx = x + \int\frac{2x-12}{x^2-2x+1}\,dx$$

$$\int \frac{2x-12}{\underbrace{x^2-2x+1}} \, dx$$

$$\begin{cases} \Delta = 4-4=0 \\ x_{1,2} = \frac{2\pm 0}{2} = 1 \end{cases}$$

$$1\cdot x^2-2x+1 = 1\cdot(x-1)^2$$

$$\frac{2x-12}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2} = \frac{Ax-A+B}{(x-1)^2}$$

porównujemy liczniki:

$$2x-12 = Ax-A+B$$

$$\begin{cases} 2 = A \\ -12 = -A+B \longrightarrow B=-10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \frac{2x-12}{x^2-2x+1} dx = \int \frac{+2}{x-1} dx + \int \frac{-10}{(x-1)^2} dx$$

$$\int \frac{dx}{x-1} = \left| \begin{matrix} y = x-1 \\ dy = dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C = \underline{\ln|x-1| + C}$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C}$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \left| \begin{matrix} y = x-1 \\ dy = dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dy}{y^2} = \int y^{-2}\, dy =$$

$$\int y^k\, dy = \begin{cases} \frac{y^{k+1}}{k+1} + C, & k \neq -1 \\ \ln|y| + C, & k = -1 \end{cases}$$

$$= \frac{y^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{y^{-1}}{-1} + C = \frac{-1}{y} + C =$$

$$= \underline{-\frac{1}{x-1} + C}$$