$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^2+n} = 1$$

$$\underbrace{\sqrt[n]{3n^2}}_{a_n} \le \underbrace{\sqrt[n]{3n^2+n}}_{b_n} \le \sqrt[n]{3n^2+n^2} = \underbrace{\sqrt[n]{4n^2}}_{c_n}$$

$\sqrt[n]{3n^2} = \sqrt[n]{3}\cdot\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n}$, where $\sqrt[n]{3}\to 1$, $\sqrt[n]{n}\to 1$, $\sqrt[n]{n}\to 1$, so $\sqrt[n]{3n^2} \to 1$

$\sqrt[n]{4n^2} = \sqrt[n]{4}\cdot\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n}$, where $\sqrt[n]{4}\to 1$, $\sqrt[n]{n}\to 1$, $\sqrt[n]{n}\to 1$, so $\sqrt[n]{4n^2} \to 1$

$b_n \to 1$ (z tw. o 3 ciągach)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a>0)$$

$a^{\frac{1}{n}} \qquad n^{\frac{1}{n}}$

Tw. o 3 ciągach:

Jeśli $a_n \le b_n \le c_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$

oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g$,

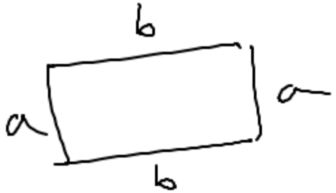
to $\lim_{n\to\infty} b_n$ istnieje i $= g$.

Wykaż, że wśród prostokątów o ustalonym obwodzie największe pole ma kwadrat.

Rozwiązanie.

Powiedzmy, że rozważamy prostokąty o obwodzie l.

Jeśli jeden z boków ma długość a, to drugi ma długość $b=\frac{1}{2}l-a$, przy czym musimy też założyć, że $a>0$ i $a<\frac{1}{2}l$, tzn. $a\in(0,\frac{1}{2}l)$.



$$2a+2b=l$$
$$2b=l-2a$$
$$b=\frac{1}{2}l-a$$

$$f(a)=\text{pole}=a\cdot\left(\frac{1}{2}l-a\right)=\frac{1}{2}la-a^2.$$

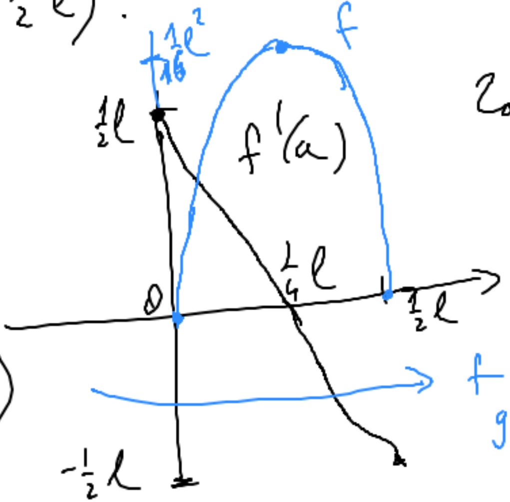
$$f'\left(\frac{1}{4}l\right)=0$$

$$f'(a)=\frac{1}{2}l-2a$$

$f'(a)>0$ dla $a\in(0,\frac{1}{4}l)\Rightarrow f\nearrow$ na $(0,\frac{1}{4}l]$

$f'(a)<0$ dla $a\in(\frac{1}{4}l,\frac{1}{2}l)\Rightarrow f\searrow$ na $[\frac{1}{4}l,\frac{1}{2}l)$

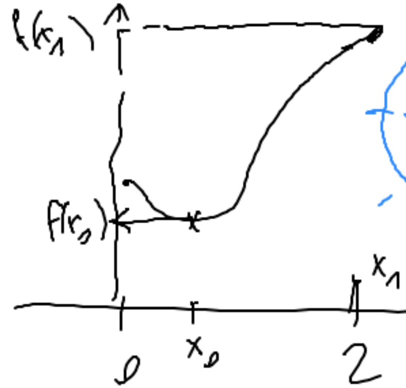
$f(\frac{1}{4}l)=(\frac{1}{4}l)^2$



f ma maksimum globalne w $a=\frac{1}{4}l$

Znaleźć najmniejszą i największą wartość $f(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}$ dla $x \in [0,2]$.

Rozw. f jest ciągła (jako różnica f. elementarnych), więc z twierdzenia Weierstrassa istnieją punkty $x_0, x_1 \in [0,2]$ takie, że $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ dla $x \in [0,2]$.



Wiemy, że punkty x_0, x_1 są jednymi z następujących punktów:

- końce odcinka, tutaj 0, 2
- punkty $x \in (0,2)$, w których $f'(x)$ nie istnieje
- punkty $x \in (0,2)$, w których $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2} = 0$$

(pochodna istnieje wszędzie na $(0,2)$)

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2} \iff 1+x^2 = 2 \iff x^2 = 1 \iff x \in \{-1, 1\} \iff x = 1$$

$f(0) = \operatorname{arctg} 0 - 0 = 0$

$f(1) = \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} > 0$

$f(2) = \operatorname{arctg} 2 - 1 > 0$

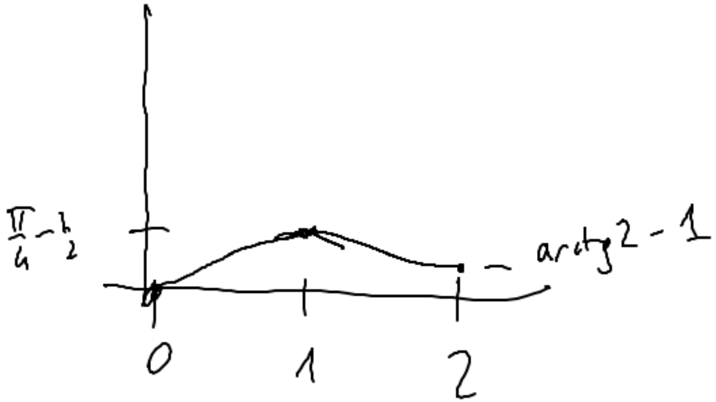
$\operatorname{arctg} 2 > \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} > 1$

Żeby sprawdzić, co jest większe, $f(1)$ czy $f(2)$, możemy popatrzeć na znak pochodnej na $(1,2)$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2} = \frac{2-(1+x^2)}{2(1+x^2)} = \frac{1-x^2}{2(1+x^2)} < 0 \quad \text{dla } x \in (1,2)$$

$\Rightarrow$ $f \downarrow$ na $[1,2]$

Odp. Najmn. wartość to 0,
najw. wartość to $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.



Nr.

$$\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\,dx = \left|\begin{array}{l} t=\sqrt{x} \\ t^2 = x \\ 2t\,dt = dx \end{array}\right| = \int \frac{t+1}{t-1}\,2t\,dt = 2\int \frac{t^2+t}{t-1}\,dt$$

$$\begin{array}{l} \quad t+2 \leftarrow \text{iloraz} \\ \hline (t^2+t) : (t-1) \\ -(t^2-t) \\ \hline \quad 2t \\ \; -(2t-2) \\ \hline \quad \overset{}{\underset{2}{\cancel{4}}} \leftarrow \text{reszta} \end{array}$$

$$= 2\int \left(t+2+\frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{t-1}\right)dt =$$

$$= 2\left[\frac{t^2}{2} + 2t + \overset{2}{\cancel{4}}\ln|t-1| + c\right] =$$

$$= t^2 + 4t + \overset{4}{\cancel{8}}\ln|t-1| + \tilde{c}$$

$$= x + 4\sqrt{x} + \overset{4}{\cancel{8}}\ln|\sqrt{x}-1| + \tilde{c}$$

$$\int x^n\,dx = \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, & n \neq -1 \\ \ln|x| + c, & n = -1 \end{cases}$$

Obliczmy

$$\int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-2}\,dx = \left| \begin{matrix} e^x = t \\ e^x dx = dt \\ e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{t} \end{matrix} \right| = \int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-2}\cdot\frac{1}{e^x}\cdot \underline{e^x dx} =$$

$$= \int \frac{t+\frac{1}{t}}{t-2}\,\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{t+\frac{1}{t}}{t(t-2)}\,dt = \int \underbrace{\frac{t^2+1}{t^2(t-2)}}_{\text{f. wymierna właściwa}}\,dt$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|t| + \frac{1}{2}\frac{1}{t} + \frac{5}{4}\ln|t-2| + C$$

$$= -\frac{1}{4}\underbrace{\ln e^x}_{x} + \dots$$

$$\frac{t^2+1}{t^2(t-2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t-2} = \frac{At(t-2)+B(t-2)+Ct^2}{t^2(t-2)} = \frac{-\frac{1}{4}}{t} + \frac{-\frac{1}{2}}{t^2} + \frac{\frac{5}{4}}{t-2}$$

$$t^2+1 = At(t-2) + B(t-2) + Ct^2$$

$t=0$: $1 = -2B \rightarrow B = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $t=1$: $2 = -A - B + C$

$t=2$: $5 = 4C$ $\qquad$ $C = \frac{5}{4}$ $\qquad$ $A = -B + C - 2 = -1/4$