Egzamin 5 II o 10:00 pojawią się zadania: 50' na pisanie

http:// prac. im.pwr.edu.pl/ ~bdyda/ sem2020 zimowy/ $\underbrace{123456}$. pdf

numer indeksu osoby piszącej egzamin

lub

https://zagram.org/ $\underbrace{123456}$.pdf

do 10:55 należy wysłać zdjęcia (skany wszystkich notatek i rozwiązań

na adres bartlomiej.dyda@pwr.edu.pl

egzaminam@pm.me

Podobnie 12 II, 10:20 start do 10:45 wysyłamy.

__Uwaga:__ Na końcu semestru (w przerwie międzysemestralnej?) studenci mają możliwość oceny kursu — proszę z tej możliwości skorzystać.

Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x) = e^{-|x|}(-x^2 - x + 1)$$

na przedziale $[-4,4]$.

Rozw. f jest ciągła, więc z tw. Weierstrasse ~~osiąga swoje kresy~~.

istnieją $x_0, x_1 \in [-4,4]$ takie, że $f(x_0) \le f(x) \le f(x_1)$, $x \in [-4,4]$.

Wiemy, że punkty x_0, x_1 są jednymi z następujących:

- $-4, 4$ (końce odcinka)
- $x \in (-4,4)$ t. że $f'(x)$ nie istnieje — być może takim punktem jest 0
- $x \in (-4,4)$ t. że $f'(x) = 0$.

$$f(x) = e^{-|x|}\left(-x^2 - x + 1\right) = \begin{cases} e^{x}\left(-x^2 - x + 1\right), & \cancel{x \le 0}\ x \in [-4, 0) \\ e^{-x}\left(-x^2 - x + 1\right), & x \in [0, 4] \end{cases}$$

Stąd dla $x \in (-4, 0)$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$f'(x) = \left[e^{x}\left(-x^2 - x + 1\right)\right]' = (e^{x})' \cdot \left(-x^2 - x + 1\right) + e^{x}\left(-x^2 - x + 1\right)' =$$

$$= e^{x}\left(-x^2 - x + 1\right) + e^{x}\left(-2x - 1\right) = e^{x}\left(-x^2 - 3x\right) = -e^{x}\, x\,(x + 3)$$

$$f'(x) = 0 \iff \underline{x = -3} \qquad (\text{dla } x \in (-4, 0))$$

a dla $x \in (0, 4)$:

$$f'(x) = \left(e^{-x}\left(-x^2 - x + 1\right)\right)' = (e^{-x})'\left(-x^2 - x + 1\right) + e^{-x}\left(-x^2 - x + 1\right)' =$$

$$= e^{-x} \cdot \underbrace{(-1)}_{(-x)'} \cdot \left(-x^2 - x + 1\right) + e^{-x}\left(-2x - 1\right) = e^{-x}\left(x^2 - x - 2\right) = e^{-x}(x - 2)(x + 1)$$

$$f'(x) = 0 \iff x = 2 \qquad (\text{dla } x \in (0, 4))$$

Mamy zatem następujących kandydatów na x_0, x_1: $f(x) = e^{-|x|}(-x^2 - x + 1)$

- -4 $\quad f(-4) = e^{-4}(-16+4+1) = -11e^{-4}$
- 4 $\quad f(4) = e^{-4}(-16-4+1) = -19e^{-4}$
- 0 $\quad f(0) = e^{-0}(-0-0+1) = 1$ największa wartość
- -3 $\quad f(-3) = e^{-3}(-9+3+1) = -5e^{-3} = \frac{-5}{e^3} > -\frac{5}{e^2}$
- 2 $\quad f(2) = e^{-2}(-4-2+1) = -5e^{-2} = -\frac{5}{e^2}$ najmniejsza wartość

Można też tak:

najmn. wartość to

$\min\{-11e^{-4}, -19e^{-4}, -5e^{-3}, -5e^{-2}\}$

$-19e^{-4} < -\frac{5}{e^2}$? $\quad | \cdot (-1)$

$19e^{-4} > 5e^{-2}$ $\quad | \cdot e^4$ (<)

$19 > 5e^2$ (<)

$4 > \frac{19}{5} > e^2$ (< nie)

$e > 2$

Jak sprawdzić, czy $f(x)=e^{-|x|}(-x^2-x+1)$ ma pochodną w zerze?

def. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1-e^{|x|}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-e^{x}}{x}\overset{H}{\underset{0/0}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{-e^{x}}{1}=-1$$

czyli $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-|x|}(-x^2-x+1)-1}{x}=$

$(\frac{f}{g})'=f'\ldots$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{-|x|}(-x^2-x+1-e^{|x|})}{x}=\lim_{x\to0}\Bigg(\underbrace{e^{-|x|}}_{\downarrow\,1}\underbrace{\frac{-x^2-x}{x}}_{-x-1\,\to\,-1}+\underbrace{e^{-|x|}}_{\downarrow\,1}\underbrace{\frac{1-e^{|x|}}{x}}_{\substack{\downarrow x\to0^-\\ 1}\ \ \substack{\downarrow x\to0^+\\ -1}}\Bigg)$$

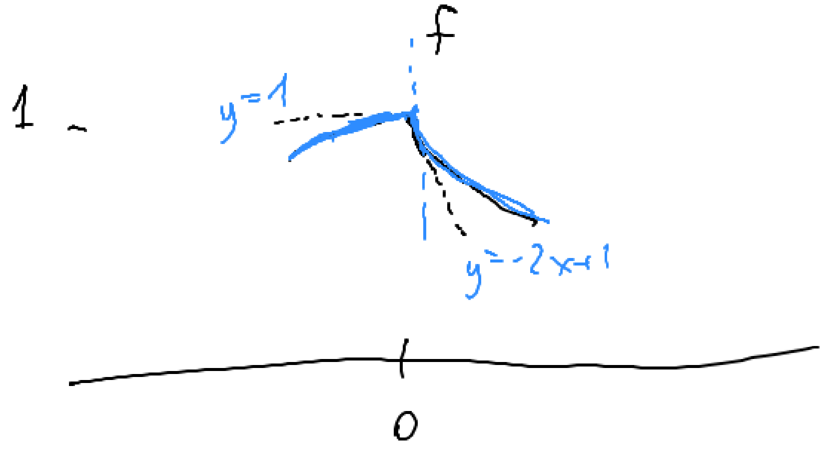
$$\lim_{x\to0^-}\frac{1-e^{|x|}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{1-e^{-x}}{x}\overset{H}{\underset{0/0}{=}}\lim_{x\to0^-}\frac{(1-e^{-x})'}{x'}=\lim_{x\to0^-}\frac{-e^{-x}(-x)'}{1}=\lim_{x\to0^-}e^{-x}=1$$

Zatem $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ nie istnieje, bo $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -1+1=0$

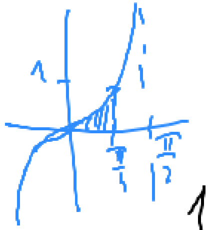
$\neq$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-0}{x} = -1-1=-2$

czyli $f'(0)$ nie istnieje



- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \; dx$



$$\left(\ln a^x = x \ln a \quad (a>0,\ x \in \mathbb{R}) \right)$$

$$\underline{I} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ \operatorname{arctg} t = x \\ \dfrac{dt}{1+t^2} = dx \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{t\,dt}{t^2+1} = \left| \begin{array}{l} y = t^2+1 \\ dy = 2t\,dt \\ \frac{1}{2}dy = t\,dt \end{array} \right| = \int_1^2 \frac{\frac{1}{2}\,dy}{y} =$$

x	0	$\frac{\pi}{4}$
t	0	$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$

t	0	1
y	1	2

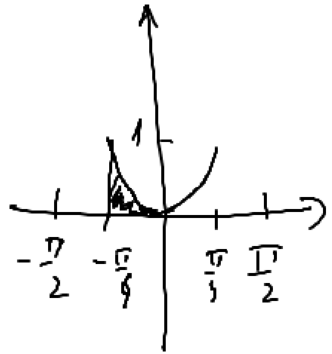
$\ln 2 < \ln e = 1$

$$= \frac{1}{2} \ln|y| \Big|_1^2 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 1 = \underline{\frac{1}{2}\ln 2}$$

$$\underline{II} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \left| \begin{array}{l} y = \cos x \\ dy = -\sin x\,dx \\ -dy = \sin x\,dx \end{array} \right. \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \frac{\pi}{4} \\ \hline y & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \left| = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{-dy}{y} = -\ln|y| \Big|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \ln 1 = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \right.$$

$$= -\ln 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln 2$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \operatorname{tg}^2 x \, dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ \operatorname{arctg} t = x + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \dfrac{dt}{t^2+1} = dx \end{array} \right| = \int_{-1}^{0} t^2 \, \frac{dt}{t^2+1} =$$



x	$-\frac{\pi}{4}$	0
t	-1	0

$$= \int_{-1}^{0} \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1} \, dt = \int_{-1}^{0} \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt = \left(t - \operatorname{arctg} t\right) \Big|_{-1}^{0} =$$

$$= \left(0 - \operatorname{arctg} 0\right) - \left(-1 - \operatorname{arctg}(-1)\right) = 1 + \operatorname{arctg}(-1) = 1 - \frac{\pi}{4} \in (0.2, 0.3)$$

$$\int \frac{x^2-x-1}{x^2+2x+6}\,dx = \int\left(1+\frac{-3x-7}{x^2+2x+6}\right)dx = x-\int\frac{3x+7}{x^2+2x+6}\,dx$$

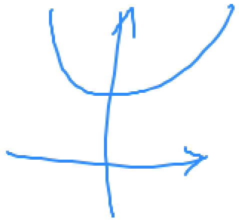
1) f. wymierna jest niewłaściwa !

$$\begin{array}{l} \quad 1 \\ \hline (x^2-x-1):(x^2+2x+6) \\ -(x^2+2x+6) \\ \hline -3x-7 \end{array}$$

2) Rozkładamy mianownik :

$$x^2+2x+6$$

$$\Delta = 4-24<0$$



jest nierozkładalny

$x_0 \neq x_1$	$(x-x_0)(x-x_1) \to$	$\frac{A}{x-x_0}+\frac{B}{x-x_1}$
	$(x-x_0)^2$	$\frac{A}{x-x_0}+\frac{B}{(x-x_0)^2}$

3) Liczymy pochodną mianownika : $(x^2+2x+6)' = 2x+2$

$$\int\frac{3x+7}{x^2+2x+6}\,dx = \int\frac{\frac{3}{2}(2x+2)+4}{x^2+2x+6}\,dx = \frac{3}{2}\boxed{\int\frac{2x+2}{x^2+2x+6}\,dx}+4\int\frac{dx}{x^2+2x+6}$$

$$y = x^2+2x+6,\ dy=(2x+2)\,dx$$

$$\int\frac{dy}{y} = \ln|y|+C = \ln(x^2+2x+6)+C$$

$$\int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+6} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+5} =$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\frac{(x+1)^2}{5}+1} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{5}}\right)^2+1} = \left|\begin{array}{l} t = \frac{x+1}{\sqrt{5}} \\ dt = \frac{1}{\sqrt{5}}dx \\ \sqrt{5}\,dt = dx \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{\sqrt{5}\,dt}{t^2+1} = \frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{arctg} t + C = \frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{5}} + C$$