Książki:
przede wszystkim skrypt
· Gewert – Skoczylas $\boxed{\text{Analiza 1}}$ Wstęp do analizy i alg.

· M. Zakrzewski Analiza książka
– bogatszy w informacje

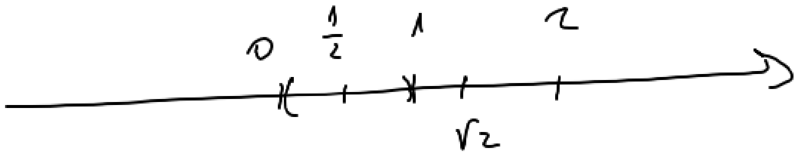
Oznaczenia:

$\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ zbiór liczb naturalnych

$\mathbb{Z} = \{\dots,-1,0,1,2,\dots\}$ –"– całkowitych

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p,q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$ –"– wymiernych

$\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych



przedziały:
$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ – otwarte

np. $(0,1)$, $(-\infty,2)$, $(0,\infty)$, $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, $a,b \in \mathbb{R}$ $[0,2]$

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$

Kwantyfikatory

„$\forall$" dla każdego (for all)

„$\exists$" istnieje (exists)

Inne oznaczenia:

$\bigwedge$

$\bigvee$

np. $\bigwedge_{x \in \mathbb{R}}$

$\bigvee_{y \geq 0}$

np.

$\forall_{x \in \mathbb{R}} \; x^2 \geq 0$

$\forall_{x \in \mathbb{R}} (x^2 \geq 0)$

$\forall_{x \geq 0} \; \exists_{y \geq 0} \; x = y^2$

Spójniki logiczne:

- koniunkcji $\wedge$ („i") $\quad \forall_{x \in \mathbb{R}} (x^2 \geq 0 \wedge x^4 \geq 0)$ – prawda
- alternatywy $\vee$ („lub") $\quad \forall_{x \in \mathbb{R}} (x^3 \geq 0 \vee x^3 \leq 0)$ — " —
- negacja $\neg$ („nieprawda, że") $\quad \forall_{x \in \mathbb{R}} \neg (x^2 < 0)$

• implikacja $\Rightarrow$ ($p \Rightarrow q$ – „z p wynika q"
„jeśli p, to q")

fałsz = 0
prawda = 1

p	q	$p \Rightarrow q$	
0	0	1	
0	1	1	– także nieintuicyjne
1	0	0	
1	1	1	

p = „pracownik wykona zadanie X"

q = „ -"- — otrzyma podwyżkę"

powiedzmy, że:

$p \Rightarrow q$

Jeśli $0 > 1$, to $0 > 2$ – prawda:

$$\begin{array}{l|l} 0 > 1 & \\ 0 > 1 & + \end{array}$$

$0 + 0 > 1 + 1 = 2$

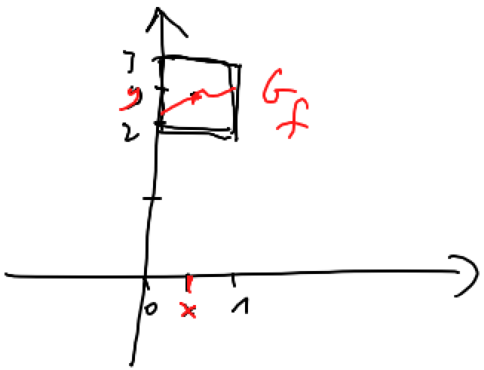
Definicja funkcji: $f: \underset{\text{dziedzina}}{X} \to \underset{\text{przeciwdziedzina}}{Y}$

$f: \underset{X}{[0,1]} \to \underset{Y}{[2,3]}$

Rozważmy zbiór

$$X \times Y = \{(x,y) : x \in X,\ y \in Y\}$$

$X \times Y = [0,1] \times [2,3]$



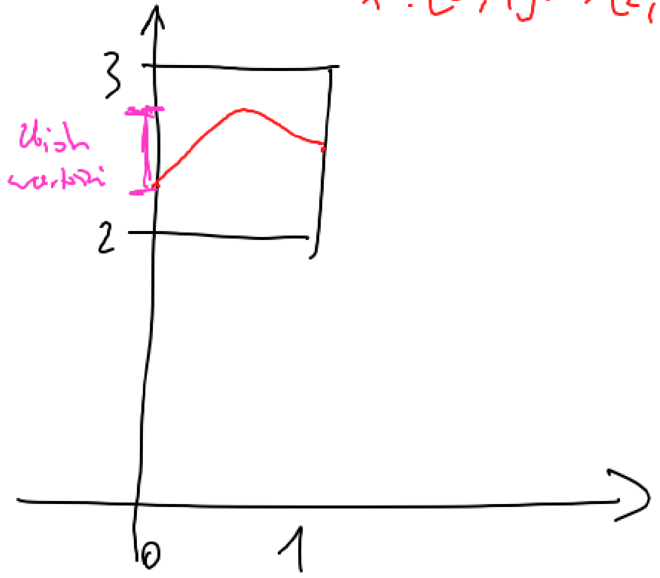
<u>Funkcją</u> $f: X \to Y$ nazywamy dowolny podzbiór $G_f \subset X \times Y$ taki, że:

- dla każdego $x \in X$ istnieje <u>dokładnie jeden</u> $y \in Y$ taki, że $(x,y) \in G_f$

oznaczamy ten jedyny y przez $f(x)$ $\quad y = f(x)$

Zbiór wartości funkcji: $\underbrace{f: X \to Y}_{\text{„}f\text{ jest funkcją o dziedzinie } X \text{ i przeciwdziedzinie } Y\text{"}}$

$f: [0,1] \to [2,3]$



$$f(X) := \{f(x) : x \in X\} \subset Y$$

Np. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x$

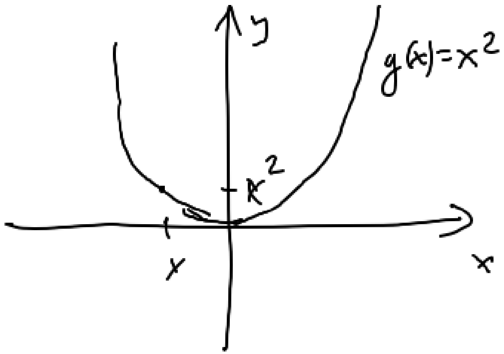
$$f(\mathbb{R}) = \{f(x) : x \in \mathbb{R}\} = \{x : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

przeciwdziedzina

$g: \mathbb{R} \to \boxed{\mathbb{R}}$ $\quad g(x) = x^2$

$$g(\mathbb{R}) = \{g(x) : x \in \mathbb{R}\} = \{x^2 : x \in \mathbb{R}\} = [0, \infty)$$

zbiór wartości



$g: \mathbb{R} \to [0, \infty)$ $\quad, g(x) = x^2$

$f: \mathbb{R} \to [0, \infty)$

np. w C/C++

```
unsigned f(unsigned x);
```

$$f : \overbrace{\{0, 1, \ldots, *\}}^{\text{unsigned}} \to \overbrace{\{0, 1, \ldots, *\}}^{\text{unsigned}}$$

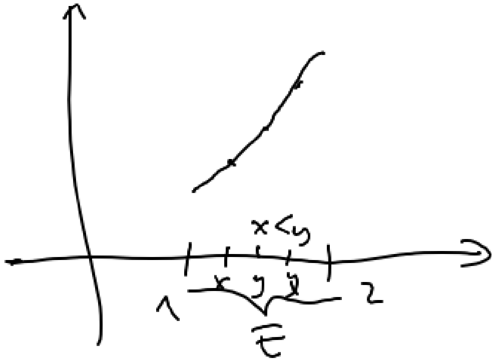
<u>np.</u>

```
unsigned f(unsigned x)
{
    return x*x;
}
```

zbiór wartości jest mniejszy niż całe „unsigned”

Definicje: Niech $E \subset \mathbb{R}$.

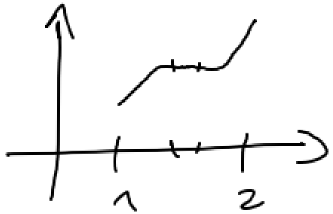
Mówimy, że $f: E \to \mathbb{R}$ jest:



- rosnąca (lub „ściśle rosnąca"), jeśli

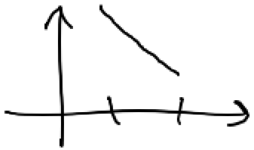
$$\forall_{x,y\in E} \left(x<y \Rightarrow f(x)<f(y)\right)$$

(dla większych argumentów f przyjmuje większe wartości)



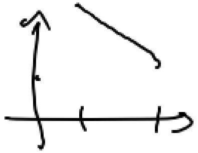
- słabo rosnąca, jeśli

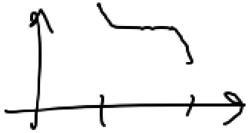
$$\forall_{x,y\in E} \left(x<y \Rightarrow f(x)\le f(y)\right)$$



- malejąca (lub „ściśle malejąca"), jeśli

$$\forall_{x,y\in E} \left(x<y \Rightarrow f(x)>f(y)\right)$$





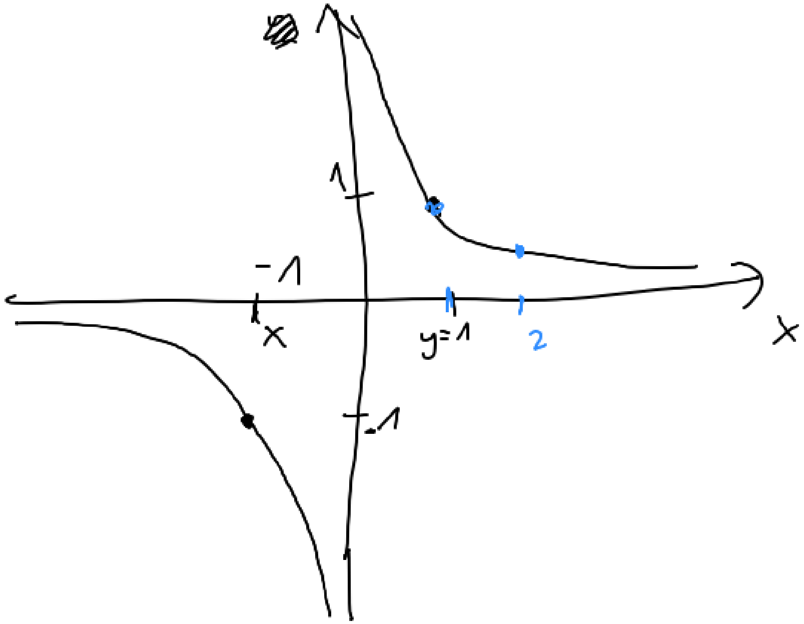
- słabo malejąca, jeśli

$$\forall_{x,y\in E} \left(x<y \Rightarrow f(x)\ge f(y)\right)$$

Np. Czy $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\frac{1}{x}$ jest malejąca?

$f:E\to\mathbb{R}$ jest malejąca, jeśli

$\forall_{x,y\in E}\ (x<y \Rightarrow f(x)>f(y))$



Nie, bo np. dla

$x=-1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$y=1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$x<y$? tak

$f(x)>f(y)$? NIE

$-1 < 1$

Nie jest też rosnąca, bo np.

$1<2$

$f(1)>f(2)$

Mówimy, że f jest <u>monotoniczna</u>, jeśli jest ~~rosnąca lub malejąca~~

~~-11- skąd~~ ~~lub~~ słabo rosnąca lub słabo malejąca.

Uwaga. Jeśli $f: D \to \mathbb{R}$ oraz $E \subset D$, to określamy funkcję <u>f obciętą do E</u>

wzorem: $$f\restriction_E : E \to \mathbb{R}$$

$$f\restriction_E (x) = f(x) \quad \text{dla } x \in E.$$

Np. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

naturalna dziedzina $f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ (naturalna dziedzina = zbiór argumentów, dla których wzór określający f ma sens)

$f\restriction_{(-\infty,0)}$ jest malejąca
$f\restriction_{(0,\infty)}$ -11-

w takiej sytuacji mówimy, że
f jest malejąca na $(-\infty,0)$
-11- $(0,\infty)$

$\left\{ f(x) = \frac{1}{x},\ x \neq 0 \right.$

Możemy w skrócie napisać:

f jest malejąca na $(-\infty, 0)$ i na $(0, \infty)$

Natomiast nie można napisać

~~f jest malejąca na $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$~~

Funkcja liniowa

Niech $a, b \in \mathbb{R}$. Funkcję postaci $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = ax + b$$

nazywamy funkcją liniową.

Np. $f_1(x) = x + 1$

$f_2(x) = 0$

$f_3(x) = 4$

$f_4(x) = -3x$

Fakt. Jeśli $a > 0$, to f jest rosnąca.

Jeśli $a < 0$, to f jest malejąca.

Udowodnimy, że jeśli $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax+b$ oraz $a<0$, to f jest malejąca.

D-d. Musimy sprawdzić następujący warunek:

$$\forall_{x,y \in \mathbb{R}} \left(x<y \Rightarrow \underbrace{f(x) > f(y)}_{\text{cel.}} \right)$$

Weźmy jakiekolwiek $x \in \mathbb{R}$ i $y \in \mathbb{R}$. Rozważmy dwa przypadki:

- Jeśli $x \geq y$, to implikacja $(x<y \Rightarrow f(x) > f(y))$ jest prawdziwa, bo jej poprzednik „$x<y$" jest fałszywy.
- Jeśli $\underbrace{x<y}_{\text{punkt wyjścia}}$, to mnożąc obustronnie tę nierówność przez $a<0$:

$$ax > ay \quad |+b$$
$$ax+b > ay+b$$
$$f(x) > f(y)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ax > ay \\ ax+\cancel{b} > ay+\cancel{b} \\ \text{chcemy: } f(x) > f(y) \end{array} \right\}$$

$\boxtimes$